

**Varázslatos
Geogebra
Tanári kézikönyv**
**a geogebra program
használatának oktatásához**

Kazinczy Judit
matematika, fizika szakos középiskolai tanár



A Szolnoki SZC Pálfy-Vízügyi Technikum pályázatot nyert az Innovatív tanulási környezet kialakítása és komplex tehetségsegítő programok megvalósítása pályázati kategóriában.

A megvalósítás időszaka: 2022-2023.

A pályázat címe: Varázslatos GeoGebra

A támogatás összege: 3 813 000 Ft

A program tartalma: A program keretein belül a résztvevők megismerkedhetnek olyan kooperatív módszerekkel, élményközpontú tanulási kereteken belül, amelyek széles látásmódot biztosítanak a matematika, a természettudományok és az egyének által tanult szakmákban felmerülő problémák felismerésére, megértésére és jól alkalmazható segítséget nyújt a feladatok megoldásában is.

A program befejezésének dátuma: 2023. 06.30.

A projekt a Nemzeti Tehetség Program keretén belül a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatásával valósulhatott meg.

Készítette:

Kazinczy Judit

Szolnoki SZC Pálfy – Vízügyi Technikum

matematika, fizika szakos középiskolai tanár

Lektorálta:

Gintlné Nagy Melinda Mária

Szolnoki SZC Rózsa Imre Technikum

matematika szakos középiskolai tanár

:

Készült: 100 példányban, A/4 méretben



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



Nemzeti
Tehetség Program

Tartalomjegyzék

1. Ismerkedés a technikai eszközzel, ismerkedés a szoftverrel	1
2. Vektorok, vektor műveletek	3
3. Alakzatok távolsága, párhuzamos, merőleges egyenesek	7
4. Háromszög nevezetes vonalai.....	9
5. Kör, kör részei, kör érintői	12
6. Kúpszeletek, kerület, terület	15
7. Síkbeli transzformációk.....	17
8. Síkidomok kerülete, területe, szabályos sokszögek.....	22
9. Egyenesek egyenlete, hajlásszöge, körcikk körszelet területe	25
10. Lineáris függvények	28
11. Egyenlet, egyenlőtlenség megoldása grafikusan	32
12. Függvény típusok, függvénytranszformációk	37
13. Testek ábrázolása 1.....	40
14. Testek ábrázolása 2. Vektorral való eltolás	42
15. Testek ábrázolása 3. Síkmetszetek	44



Előszó

A pályázat megírásának ötlete abból fakadt, hogy korábbi években megtaláltam a Geogebra szoftvert az interneten. A program több verziója elérhető online formában, de letölthető és telefonos applikációja is használható. Jőmagam a Geogebra Classic 5.0 verziót használom. Miután megtetszettek az alkalmazások, amelyek mai napig megtalálhatók az online felületeken. Alkalmaztam óráimon, mint demonstrációs módszert, és igyekeztem rávenni tanulóimat annak használatára. Igyekeztem példákon keresztül megmutatni a gyakorlatának néhány spektrumát és biztattam őket annak megismerésére.

Míg hosszú órákba tellett, hogy magam is élőben tudjam alkalmazni feladatmegoldásokhoz, ehhez nagy segítségemre volt a covid járvány alatti online oktatás, a használat gyakorlatát egyre kevésbé sikerült elérnem tanulóim körében. Aki fogékony volt, annak visszajelzései szerint még a felsőfokú tanulmányaiban is segítette. Az utóbbi évek tapasztalata az, hogy a tanulók maguktól nem „veszik a fáradságot” egy-egy szoftver megismerésére, míg ismeretes a korábbi években azt kihívásnak tekintették.

Ez volt a tapasztalat, ez indította el gondolataimat a megoldás keresésére.

A pályázati kiírás lehetőséget adott céljaim megvalósítására.

A pályázat tartalmazza egy csoport 60 órányi foglalkoztatást, mely során a pályázat résztvevői megismerhetik a program kezelését, alkalmazásának lehetőségeit. A tanári segédletben mutatott feladatok 9. évfolyam számára készültek, közelítőleg ennek az évfolyamnak a kerettantervére épülve.

A program tartalmának másik eleme, hogy a megtartott foglalkozásokon keresztül készüljön el egy olyan tanári, oktatói segédlet, amely a matematika tantárgy keretein belül segíti a tanárokat ahhoz, hogy megismertethessék a tanulókkal a program használatát.

A pályázat komplexitását mutatja, hogy tartalmazott két olyan utazást, amelyben a vizuális élményeken, a hangérzékelés, látvány és közösségi élmények által a képzelet segítségével olyan szintre juthassanak, ami segít megvalósítaniuk a szakmai sikereket.

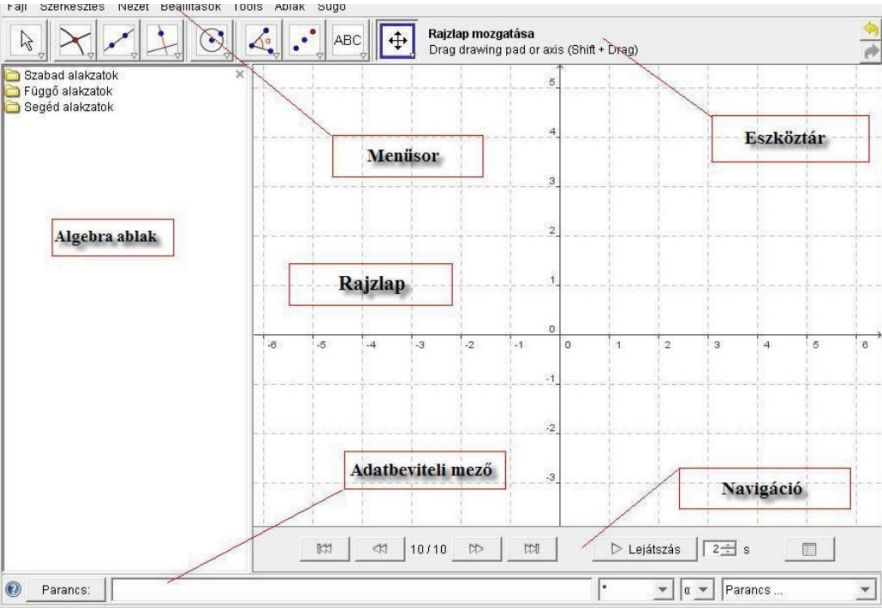
Az elkészült tanári segédletet ötlet adónak, kiindulópontnak szántam. A munkám alapja a program felhasználói kézikönyve. <https://wiki.geogebra.org/hu/K%C3%A9zik%C3%B6nyv>

Szerepelnek benne alapkészségek kialakítását célzó feladatoktól kezdve a komplex használatig terjedő ajánlásig. A lehetőségek végtelenek, találkoztam már a versenyfeladatok - akár a KÖMAL feladatainak - a szoftver általi megoldásával is. Nyilvánvalóan alkalmas a tanulók geometriai látásmódjának fejlesztésére, a függvények megismerésének, felhasználásának, alkalmazásának lehetőségeire.

A projekt tapasztalata, hogy a szoftver alkalmazásának elsajátítása egy olyan önképző folyamat, melyen a tanulóknak önállóan időt nem sajnálva kell végigmenni. Ez a csoport tagjainak eltérő készségei, eltérő motivációja miatt eltérő szint elérésével sikerült. A későbbiekben a projektben szerzett tapasztalatok által a tanulók képesek lesznek önállóan egyre magasabb szintre jutni. A szoftver alkalmazásával nagyobb eséllyel lesznek képesek a szakmájukban előforduló matematikai problémák megoldására.

A tanári segédlet mellékleteként közzé teszek néhány általam készített geogebra fájlt, melyek felhasználásával a tananyagok könnyebben feldolgozhatók, tovább fejleszthetők.



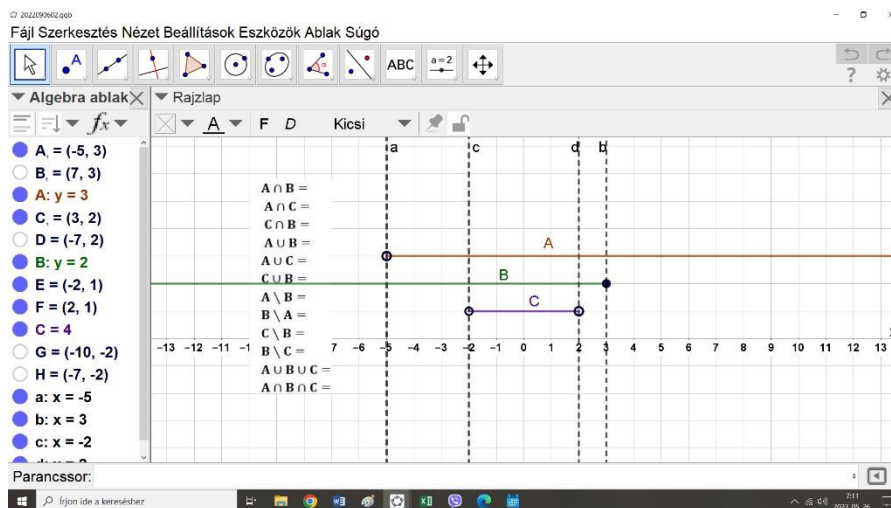
<p>1.</p>	<p>Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam</p>	
<p>Téma:</p>	<p>Ismerkedés a technikai eszközzel, ismerkedés a szoftverrel</p>	
<p>Elmélet</p>	<p>A használt szoftver letöltése a számítógépre. GeoGebra Classic 5.0</p>  <p>Ismerkedés a program használatával.</p> <ul style="list-style-type: none"> Eszköztár Algebra ablak Geometria ablak Rajzlap Formázóléc Parancssor Beállítások 	
<p>Feladat</p>	<p>Ismerkedünk a szoftver használatával!</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ábrázolj tetszőleges pontokat, egyeneseket, szakaszokat a rajzlapon! Figyeld meg az ábrázolás során az egyes alakzatok jelölési lehetőségeit, színezését, feliratozását! 2. Vizsgáld meg a Beállítások lehetőségeit! Állítsd be: <ul style="list-style-type: none"> Feliratozás – Az összes új alakzatra Betűméret: igény szerint Beállítások mentése 	



3. Ábrázold a következő intervallumokat!

$$A =]-5; \infty[\quad B =]-\infty; 3] \quad C =]-2; 2[$$

Határozd meg a következő műveletek eredményét! $A \cap B =$, $A \cap C =$, $C \cap B =$, $A \cup B =$, $A \cup C =$, $C \cup B =$, $A \setminus B =$, $B \setminus A =$, $C \setminus B =$, $B \setminus C =$, $A \cup B \cup C =$, $A \cap B \cap C =$,

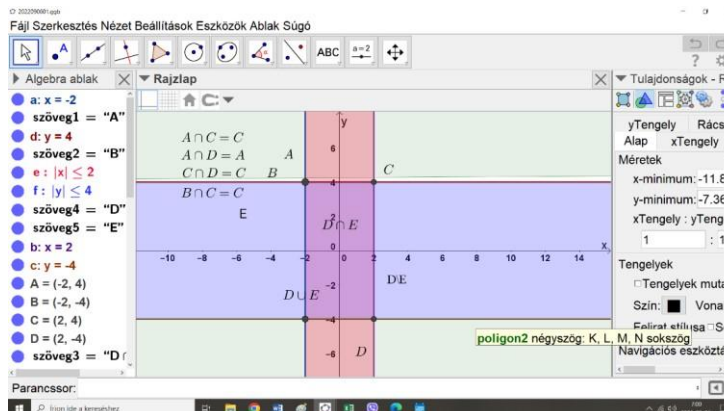


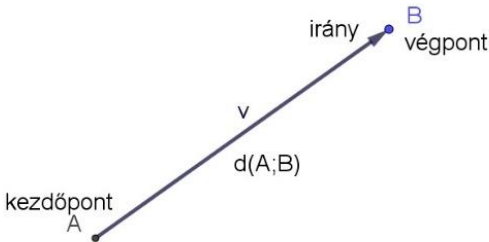
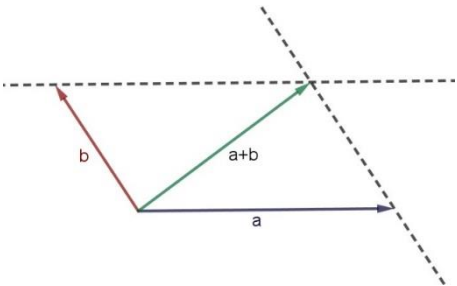
4. Ábrázold a koordinátasíkon a következő pontthalmazokat!

- $A = \{P \in S \mid x = -2, x = 4\}$
- $B = \{P \in S \mid y = -2, y = 4\}$
- $C = \{P \in S \mid |x| = 2, |y| = 4\}$
- $D = \{P \in S \mid |x| \leq 2\}$
- $E = \{P \in S \mid |y| \leq 4\}$

Határozd meg a következő műveletek eredményét! Jelöld a koordinátasíkon!

$A \cap B =$, $A \cap C =$,
 $A \cap D =$, $B \cap C =$,
 $C \cap D =$, $D \cap E =$,
 $D \cup E =$,
 $D \setminus E =$, $E \setminus D =$,
 $\bar{E} =$, $\bar{D} =$,
 $\overline{E \cap D} =$,



2.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Vektorok, vektor műveletek	
Elmélet	<p><u>Matematikai elmélet:</u> A vektor alapfogalom, nem definiáljuk. Körülírással, a vektor egy irányított szakasz.</p> <p>Jelölése: \underline{v}, vagy \overrightarrow{AB} Szövegkörnyezetben vastag, Bold betűtípust alkalmazunk.</p> <p>Nagysága, iránya, kezdőpontja és végpontja is van.</p> <p><u>A vektor abszolútértéke:</u> a vektor hossza. Jele: $\underline{v} = d(A;B)$, a kezdő és végpont távolsága.</p> <p><u>Nullvektor:</u> olyan vektor, amelynek abszolútértéke= 0, iránya tetszőleges. Jele: $\underline{0}$</p> <p><u>Két vektor egyenlő:</u> ha irányuk és abszolútértékük is megegyezik. Tehát a vektor tetszőlegesen eltolható.</p> <p><u>Egyállású vektorok:</u> párhuzamosak</p> <p><u>Ellentett vektor:</u> egy vektor ellentettje az a vektor, amely vele egyállású, egyenlő abszolútértékű, de ellentétes irányú. Jele: \underline{v} ellentettje $-\underline{v}$</p> <p><u>Műveletek vektorokkal</u></p> <p>I. Összeadás <u>Két vektor összege(paralelogramma módszer) : $a+b=c$</u></p> <p>Két vektor összegén értjük a közös kezdőpontból kiinduló vektorokból szerkeszthető paralelogramma, közös kezdőpontból kiinduló, szemközti csúcsba mutató átlóvektort.</p> $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ <p>Szerkesztés:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. A vektorokat közös kezdőpontba toljuk 2. Mindkét vektor végpontján keresztül párhuzamost húzunk a másik vektorral 	 



3. Behúzzuk a közös kezdőpontból a szemközti csúcsba mutató átlót. Iránya a szemközti csúcsba mutat. Ez lesz a két vektor összege.

Több vektor összegzése: Lánc(hurok) módszer

A vektorokat egymás után tetszőleges sorrendben eltoljuk úgy, hogy az első végpontja legyen a következő kezdőpontja és így tovább.

Az összegvektor az első kezdőpontjából az utolsó végpontjába mutat.

II. Kivonás

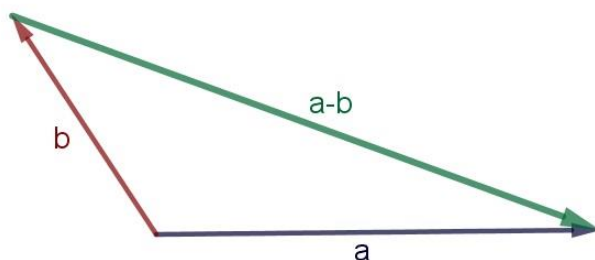
Két vektor különbsége : $a-b=c$

Két vektor különbségén értjük azt a vektort, amely a közös kezdőpontból kiinduló vektorok végpontjait köti össze és a kisebbítendő felé mutat.

$$\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$$

Szerkesztés:

1. A vektorokat közös kezdőpontba toljuk
2. Összekötjük a vektorok végpontjait
3. A különbség vektor a kisebbítendő felé mutat.



III. Skalárral való szorzás:

Valamely „a” vektor $\alpha \in R$, számmal való szorzatán értjük azt az $\alpha \cdot \vec{a}$ vektort, amit úgy kapunk, hogy $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$, tehát a kapott vektor abszolútértéke: a vektor hosszát szorozzuk a szám abszolútértékével.

Iránya az „a” vektorral megegyező irányú, ha $\alpha > 0$ és \vec{a} vektorral ellentétes, ha $\alpha < 0$.

Ha $\alpha = 0$, akkor az eredmény nullvektor.

Ha a nullvektort bármely számmal szorozzuk, az eredmény szintén nullvektor.



Feladat

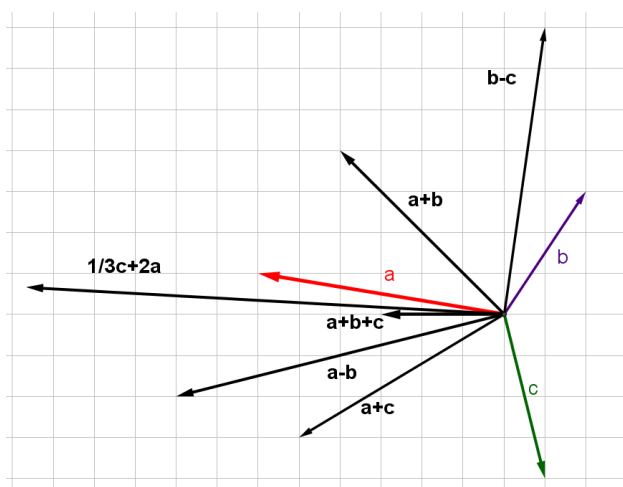
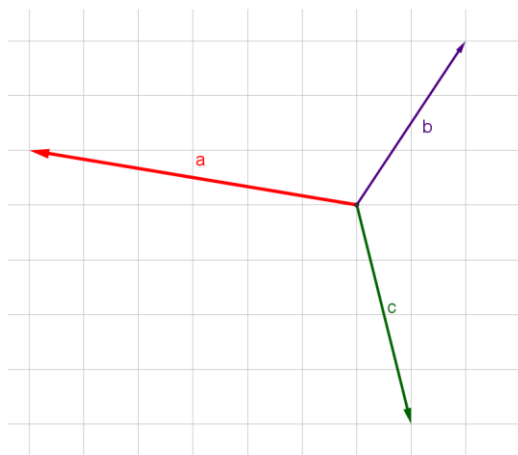
1. Vegyél fel tetszőleges
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokat!

Szerkeszd meg a következő
vektorokat!

$$\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{a} + \vec{c},$$

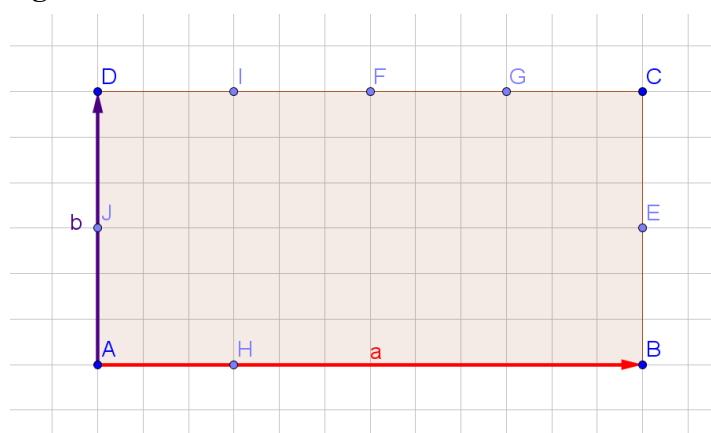
$$\vec{b} - \vec{c},$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \frac{1}{3}\vec{c} + 2\vec{a},$$



2. Adott $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok.

Szerkeszd meg a következő vektorokat, add meg $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok segítségével!



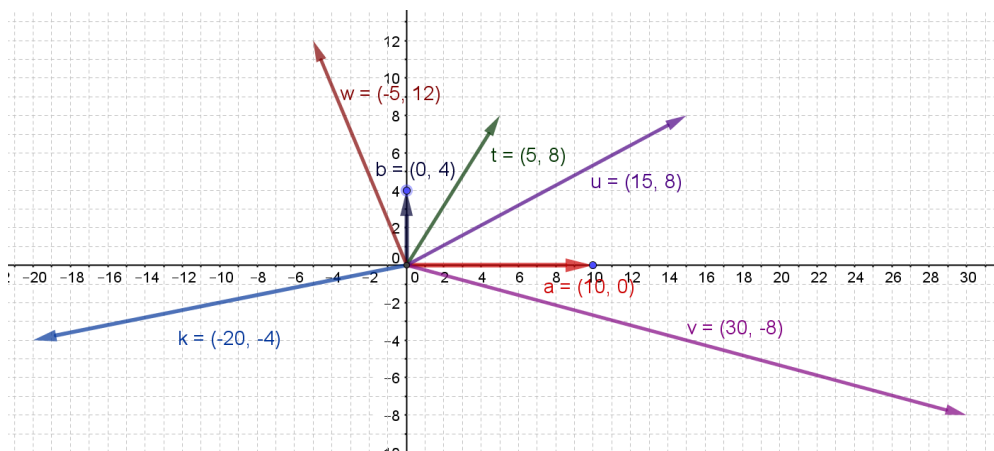
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b} \text{ vektor}$$

$$\vec{AE} =, \quad \vec{BC} =, \quad \vec{BD} =, \quad \vec{CE} =, \quad \vec{DF} =, \quad \vec{DA} =, \quad \vec{EA} =, \quad \vec{FB} =,$$

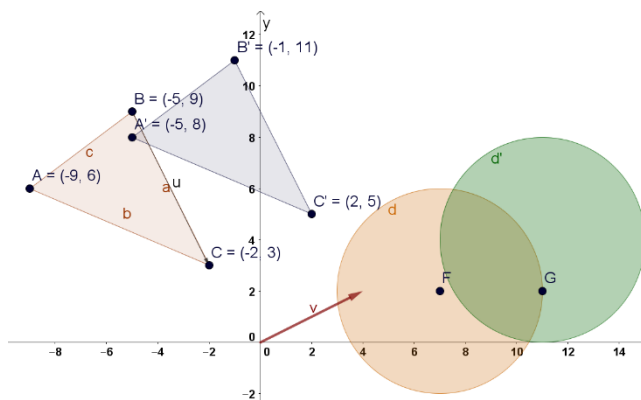
$$\vec{FI} =, \quad \vec{FD} =, \quad \vec{EI} =, \quad \vec{JE} =, \quad \vec{JG} =,$$

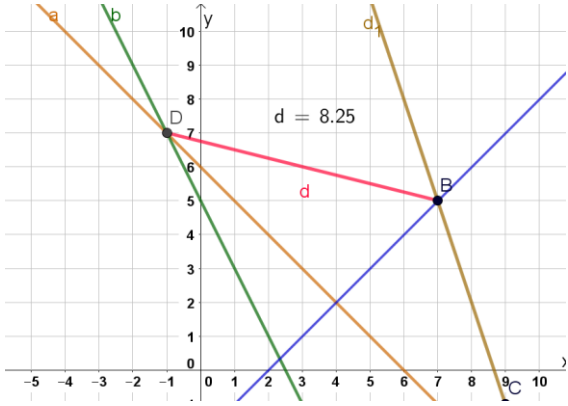


3. Hogyan állíthatók elő az alábbi rajzon szereplő $\vec{k}, \vec{t}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektorok az \vec{a} és \vec{b} vektorokkal párhuzamos vektorok összegeként?



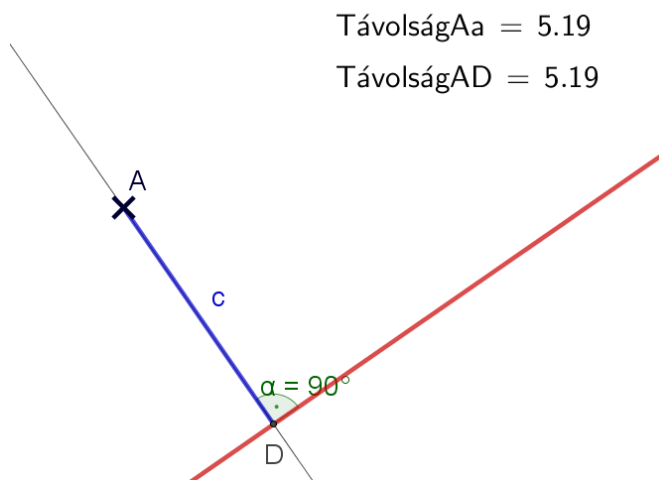
4. Tolj el egy adott $v(-2;5)$ vektorral tetszőleges síkidomokat! Határozd meg a keletkező síkidomok pontjainak koordinátáit!



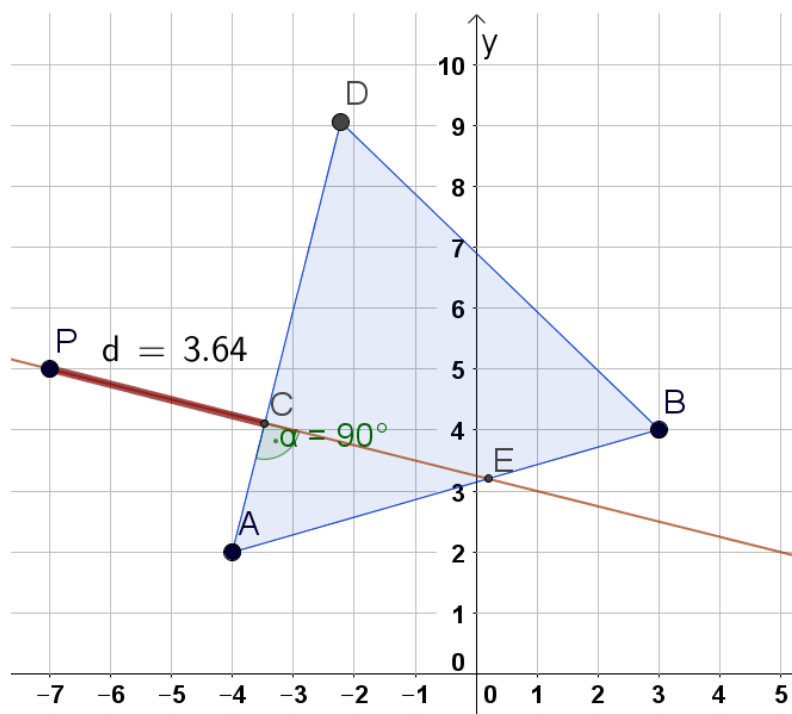
3.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Alakzatok távolsága, párhuzamos, merőleges egyenesek	
Elmélet	<p>Geogebra alkalmazás:</p> <ul style="list-style-type: none"> - pont, egyenes, szakasz ábrázolása - parancssor használata - Metszéspont funkció - Távolság funkció - Szabályos sokszög szerkesztése <p>Szükséges matematikai elmélet:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Két egyenes metszéspontja, két pont távolsága • Pont és egyenes távolsága • Két alakzat távolsága- az őket összekötő szakaszok közül a legrövidebb 	
Feladat	<p>1. Határozd meg a következő egyenesek metszéspontját!</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Az egyenesek egyenletét írd be a parancssorba! A parancssorban lévő Metszéspont funkciót használd! A metszéspont előállítható úgy is, hogy a két alakzatot egyenlővé teszed. Használd a Távolság funkciót!</p> </div> <p style="text-align: center;"> $a: x + y = 6$ $b: 2x + y = 5$ $a \cap b = D$ $c: -x + y = -2$ $d: -3x - y = -26$ $c \cap d = B$ </p> <p>Határozd meg az D, B pontok távolságát!</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>2. Határozd meg az A = (-5, 6) pont és az a: $-9x + 13y = 41$ egyenes távolságát!</p>	



A feladatot oldd meg a Geogebra Távolság funkcióval is és végezd el a szerkesztést is!

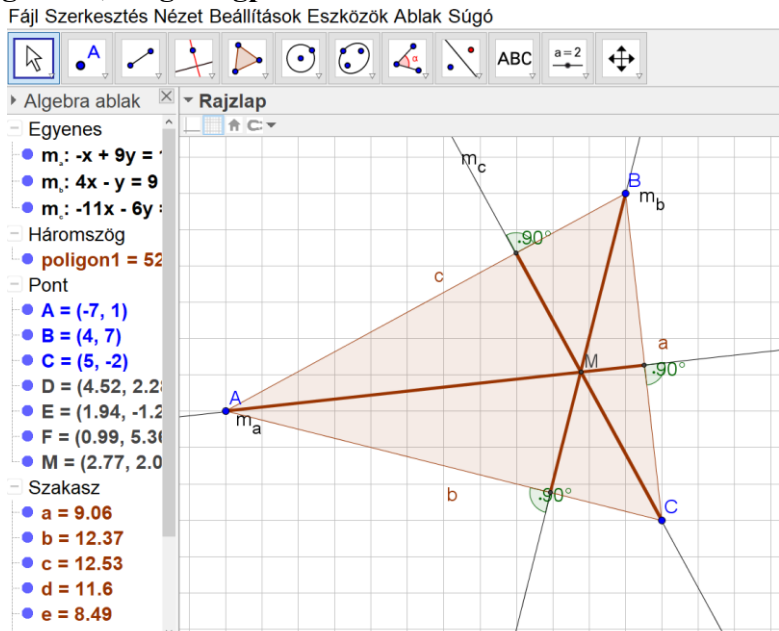


3. Milyen távolságra van a $P(-7;5)$ pont a $A = (-4, 2)$, $B = (3, 4)$ csúcspontú szabályos háromszögtől?



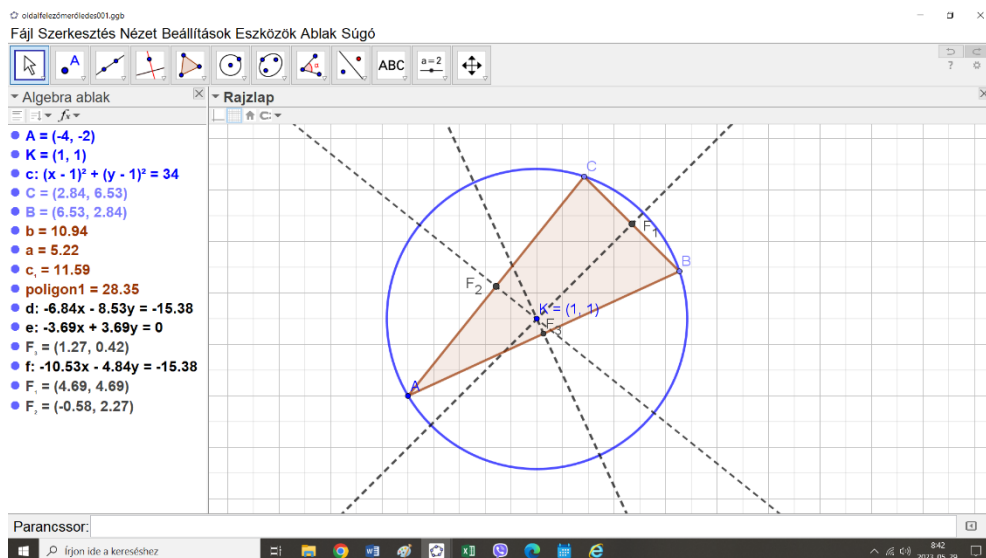
**Húzz párhuzamost a C csúcson keresztül az AB oldallal!
Milyen távolságra van egymástól a két egyenes?**



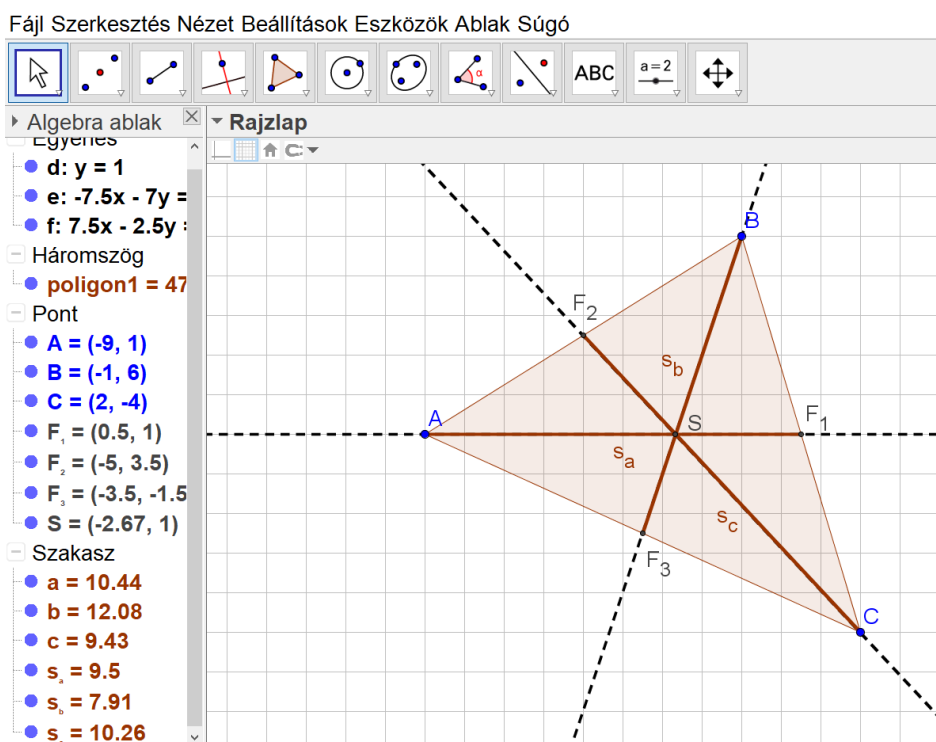
<p>4.</p>	<p>Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam</p>	
<p>Téma:</p>	<p>Háromszög nevezetes vonalai</p>	
<p>Elmélet</p>	<p>Geogebra alkalmazás:</p> <ul style="list-style-type: none"> - sokszög - felezőpont - merőleges egyenes - párhuzamos egyenes - metszéspont - két pont távolsága - kör rajzolása <p>Szükséges matematikai elmélet:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Háromszög magasságvonalai, magassága, magasságpont • Háromszög oldalfelező merőlegesei, merőlegesek metszéspontja, köré írt kör középpontja, sugara • Súlyvonalak, súlyvonalak metszéspontja • Szögfelezők, szögfelezők metszéspontja, beírt kör középpontja, sugara 	
<p>Feladat</p>	<p>Szerkeszd meg a következőket!</p> <ul style="list-style-type: none"> - Háromszög magasságai, magasságpont - Háromszög oldalfelező merőlegesek metszéspontja, háromszög köré írt köre - Súlyvonalak - Szögfelezők, beírt kör sugara <p>Magasság vonal, magasságpont:</p> 	



Oldalfelező merőleges:



Súlyvonal:



Belső szögfelezők:

szögfelezok001.ggb

Fájl Szerkesztés Nézet Beállítások Eszközök Ablak Súgó

Algebra ablak

- $A = (-1, 1)$
- $B = (4, 10)$
- $C = (10.76, -2.59)$
- $K = (2.69, 3.4)$
- $T = (6.46, 5.42)$

Szakasz

- $a = 14.29$
- $b = 18.12$
- $c = 14.21$
- $r = 4.28$

Szög

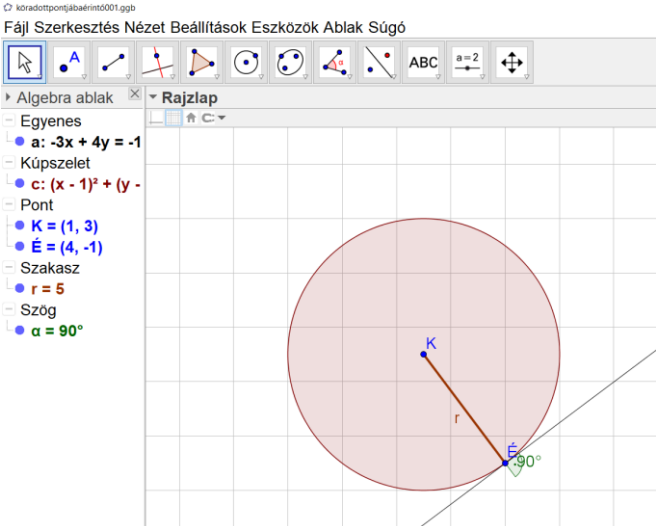
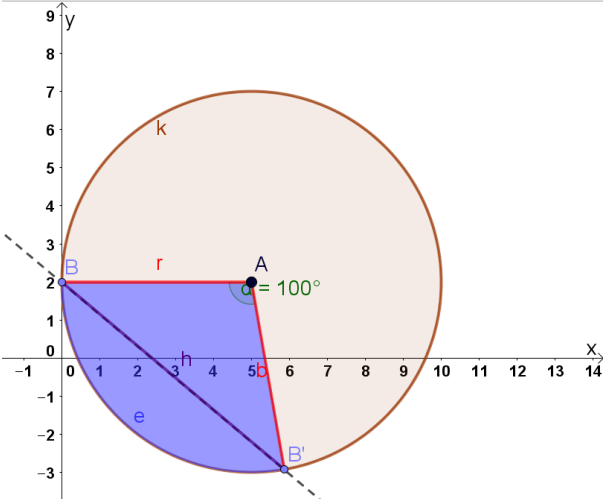
- $\alpha = 90^\circ$
- $\beta = 50.72^\circ$
- $\gamma = 78.93^\circ$
- $\delta = 50.35^\circ$

Szöveg

- szöveg1 = "a/2"
- szöveg1₁ = "a/2"
- szöveg1₂ = "β/2"
- szöveg1₃ = "β/2"

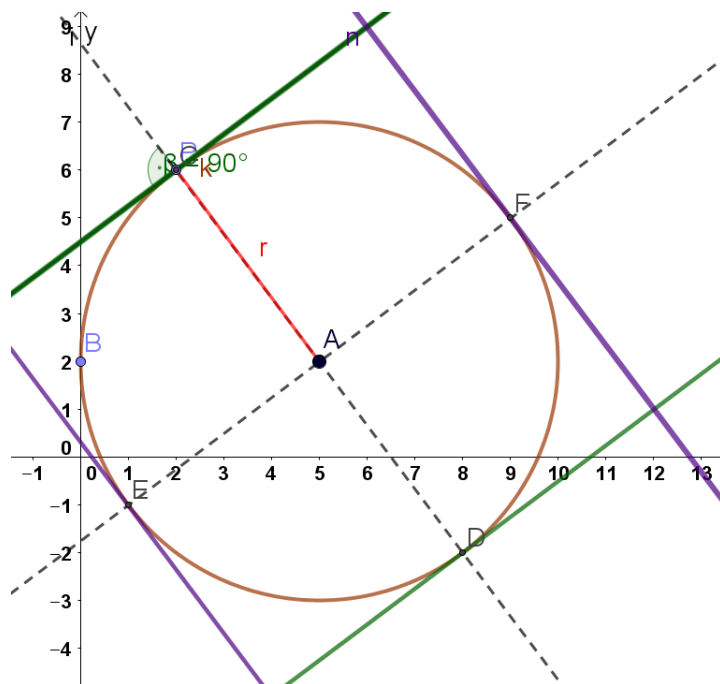
Parancssor:



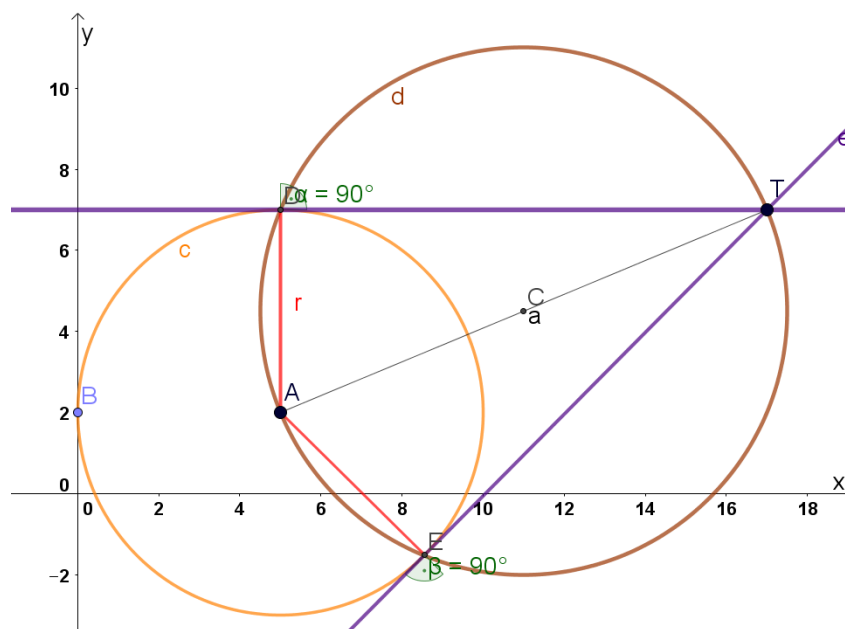
5.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Kör, kör részei, kör érintői	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Kör • Kör részei • Kör érintője • Külső pontból húzott érintő • Két kör közös külső, belső érintői 	
Feladat	<p>1. Szerkeszd meg tetszőleges kör adott pontba húzott érintőjét!</p>  <p>2. Szerkeszd meg a következő kört: középpont $K(5;2)$ $r=5$ cm! Rajzold be a körbe a következőket! 100°-os középponti szöghöz tartozó húr, szelő, körcikk, körszelet.</p> 	



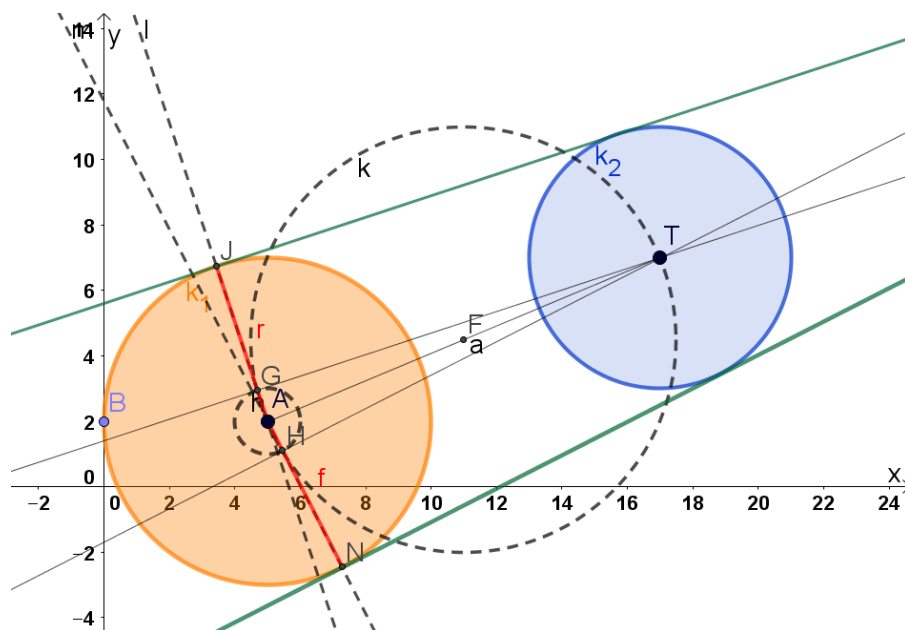
3. Szerkeszd meg az előző érintővel párhuzamos és merőleges érintőket!

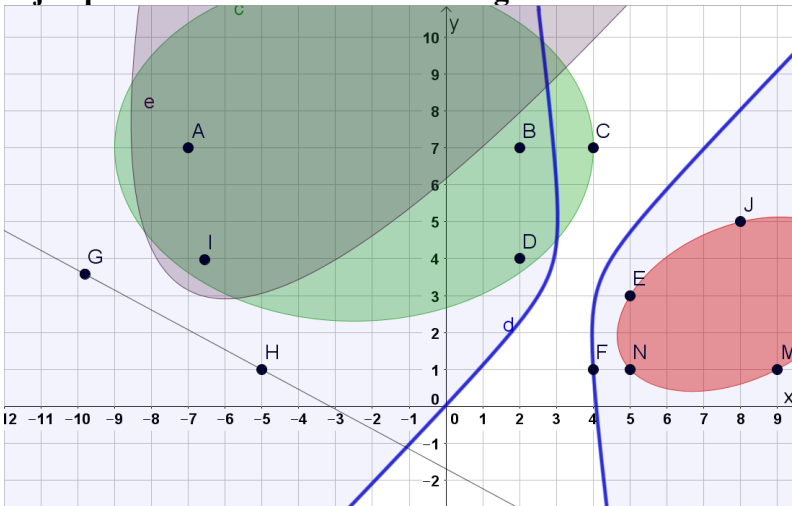
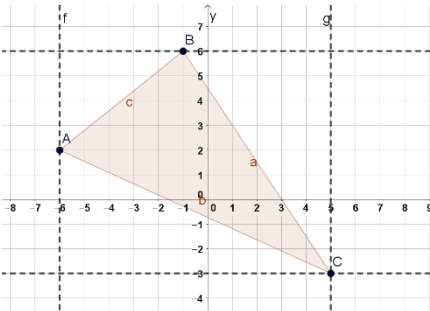


4. Szerkeszd meg a T(17;7) pontból a körhöz húzott érintőket!

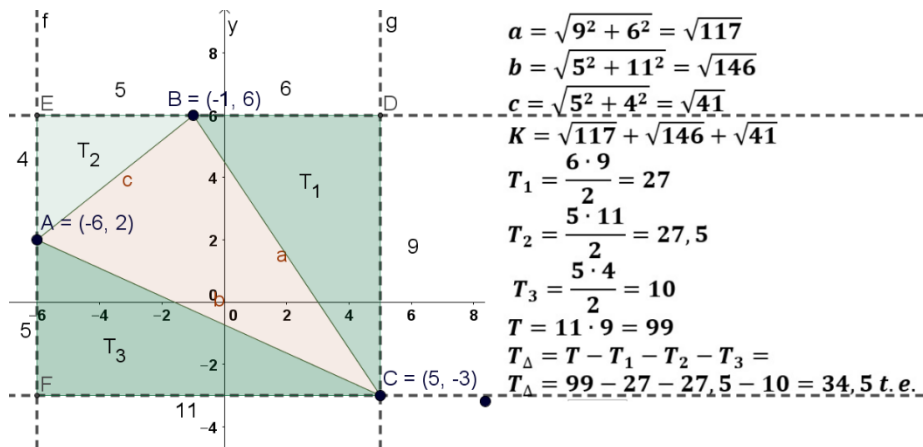


5. Szerkeszd meg a következő két kört: k_1 :középpont $K_1(5;2)$ $r=5$ cm,
 k_2 :középpont $K_2(17;7)$ $r=4$ cm!
 Rajzold be a körök közös külső érintőit!



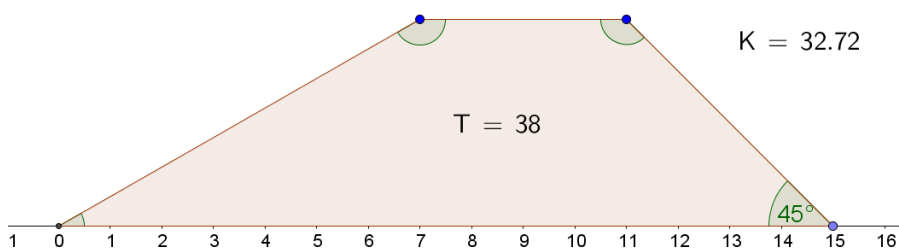
<p>6.</p>	<p>Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam</p>	
<p>Téma:</p>	<p>Kúpszeletek Síkidomok kerülete, területe</p>	
<p>Elmélet</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Kör • Parabola • Ellipszis • Hiperbola • Kerület • Terület 	
<p>Feladat</p>	<p>1. Szerkessz tetszőleges helyre kört, parabolát, ellipszist, hiperbolát egy rajzlapra. Színezd ki és feliratozd a görbéket!</p>  <p>2. Vizsgáld meg a görbék egyenleteit az algebra ablakban! Tegyé megállapítást a görbék a, b, c, d, e, C értékeire és egyenlettípusaira az alábbi általános egyenlet alapján!</p> $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + C = 0$ <p>3. Szerkeszd meg az $A(-6, 2)$ $B(-1, 6)$ $C(4, -3)$ csúcspontú háromszöget! Határozd meg a háromszög kerületét, területét! A számolást írd fel a rajzlapra! A számolás eredményeit ellenőrizd a GeoGebra alkalmazásokkal!</p> 	

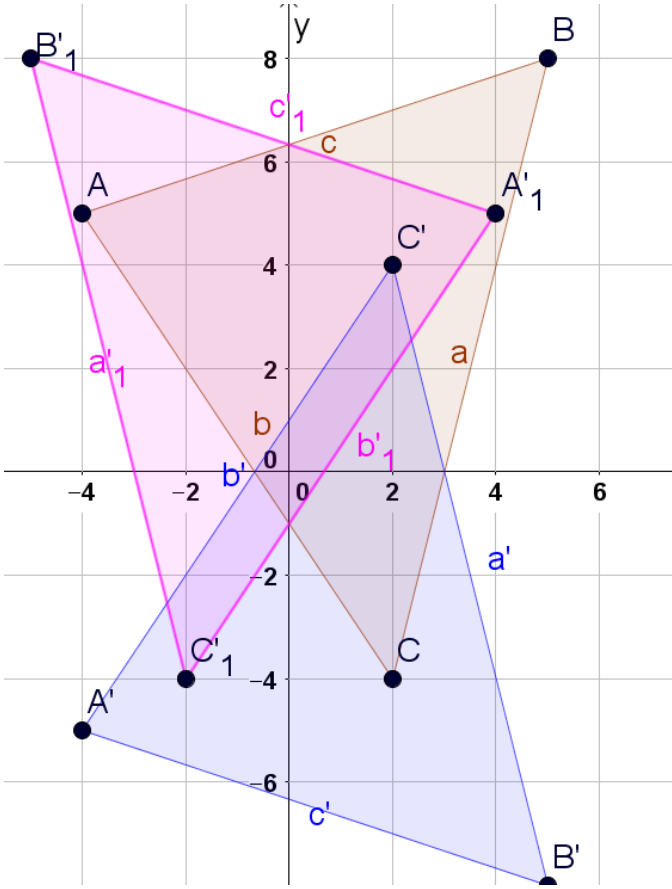




4.

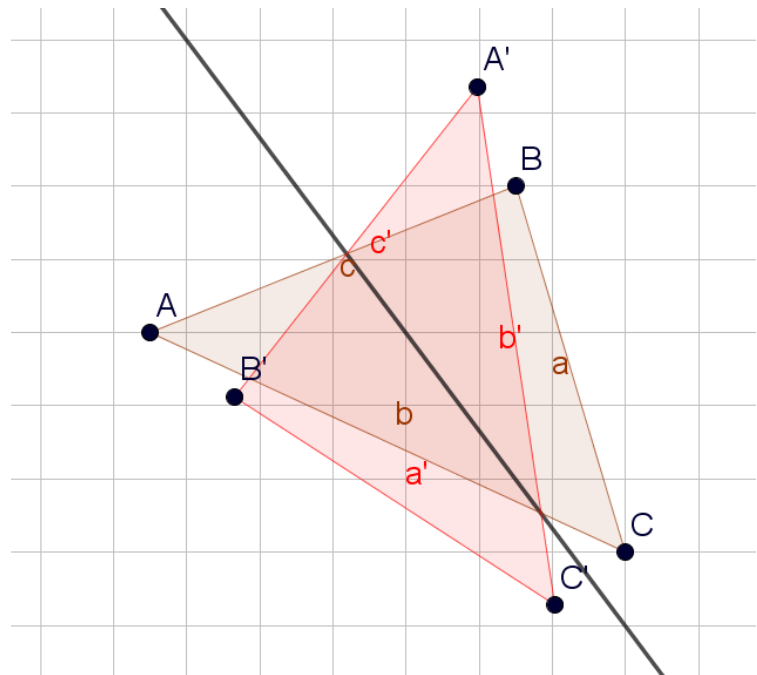
Egy trapéz alapjai 15 és 4 egység hosszúak, magassága 4, egyik alapon fekvő szöge 45° . Határozd meg a területét, kerületét!



7.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Síkbeli transzformációk	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Tengelyes tükrözés • Középpontos tükrözés • Pont körül adott szöggel való elforgatás • Vektorral való eltolás 	
Feladat	<p>1. A koordináta-rendszerben adott A, B, C pontok által meghatározott háromszöget tükrözz az</p> <ol style="list-style-type: none"> x tengelyre y tengelyre 	

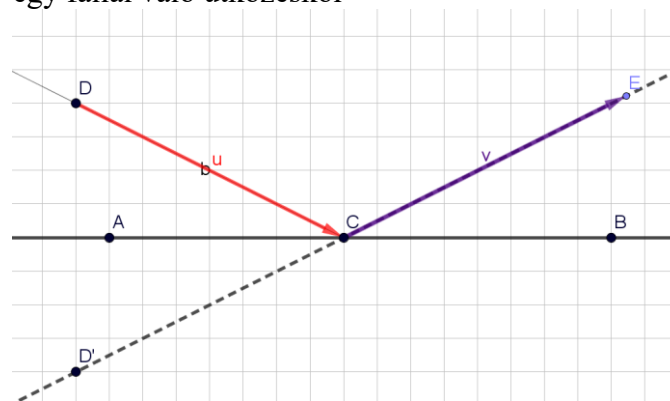


2. Adott A, B, C pontok által meghatározott háromszöget tükrözz tetszőleges, adott egyenesre!



3. Szerkeszd meg egy biliárdgolyó útvonalát

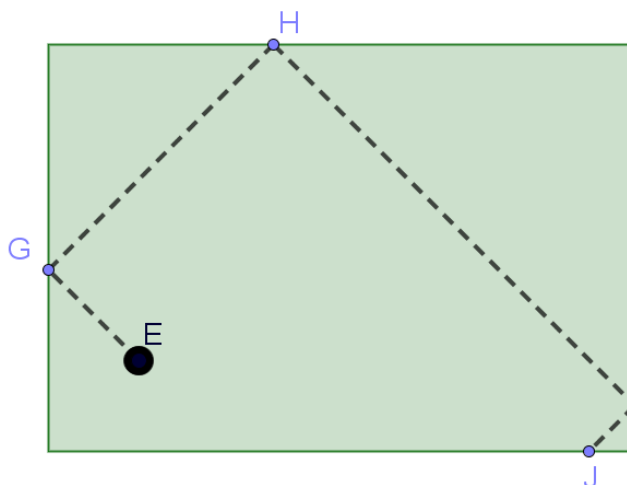
a. egy fallal való ütközéskor



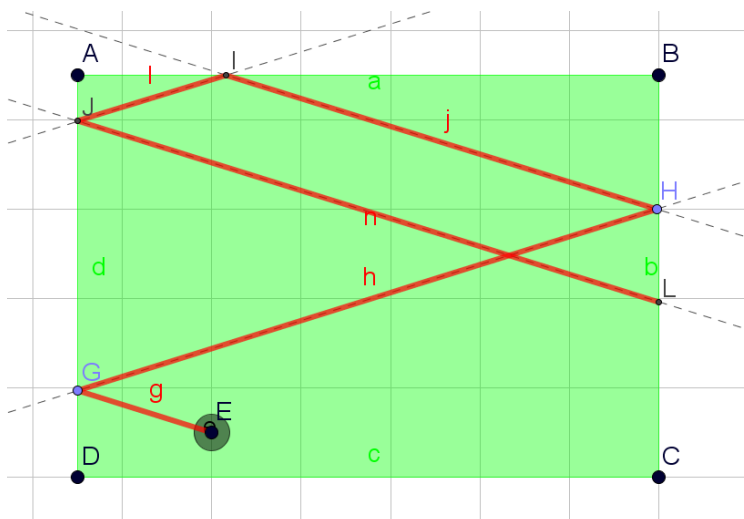
b. egy fallal való ütközéssel találjon el egy másik golyót



c. három fallal való ütközéskor

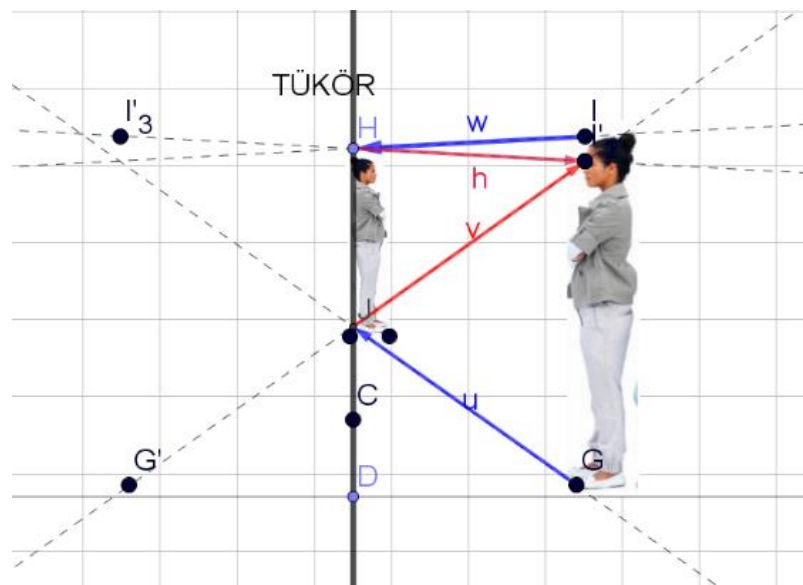


d. négy fallal való ütközéskor



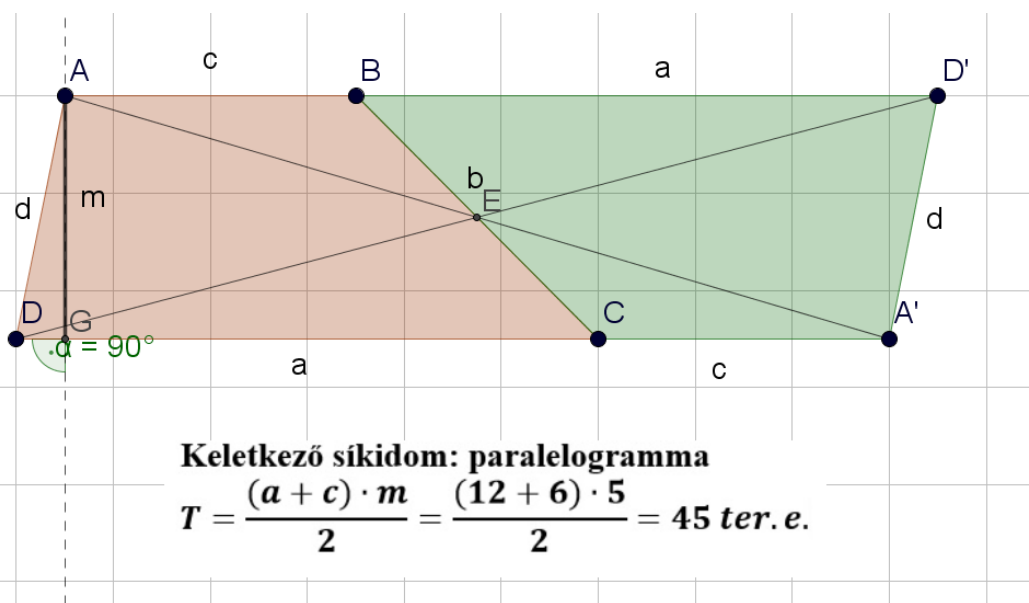
4. Szerkeszd meg egy ember által önmagáról látott képet síktükörben!



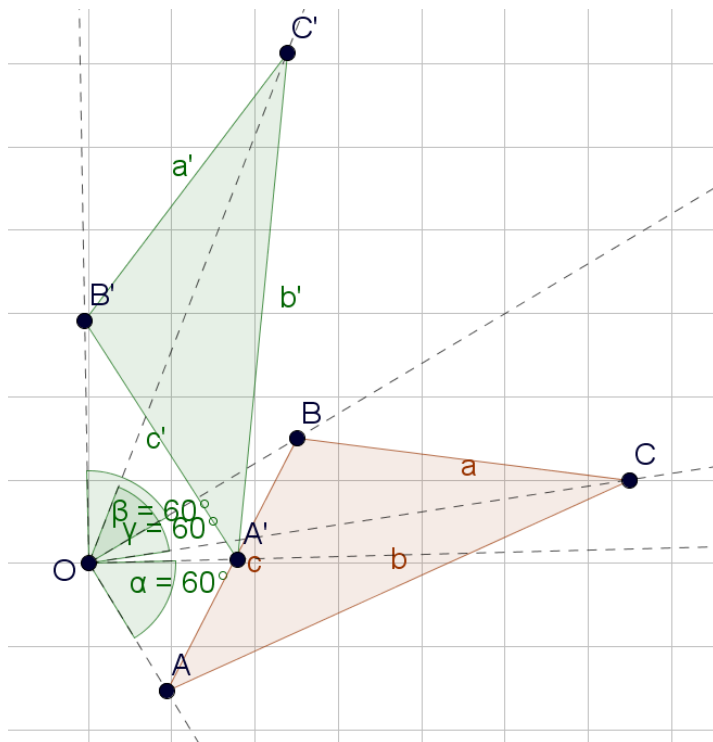


5. Tükrözz egy trapéz egyik szárának a felezőpontjára!

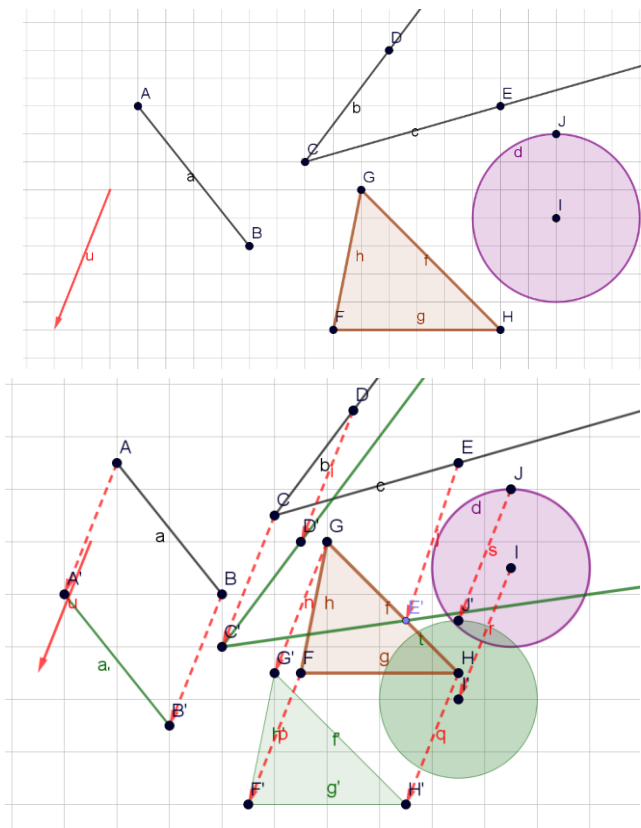
Határozd meg a keletkező síkidomot, oldalainak nagyságát, területét!



6. Forgass el egy adott háromszöget az O pont körül 60° -kal az óramutató ellentétes irányba! (Az óramutató járásával ellentétes irányt tekintjük pozitív irányúnak, az óra járásával megegyező irányt negatív irányúnak.)



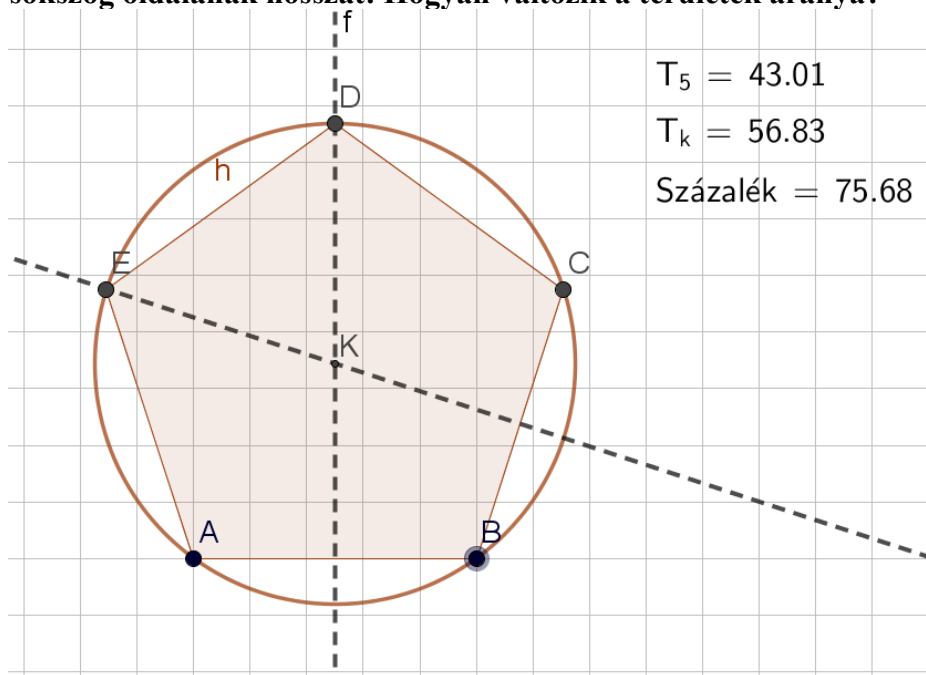
7. Told el az adott v vektorral a következő alakzatokat!



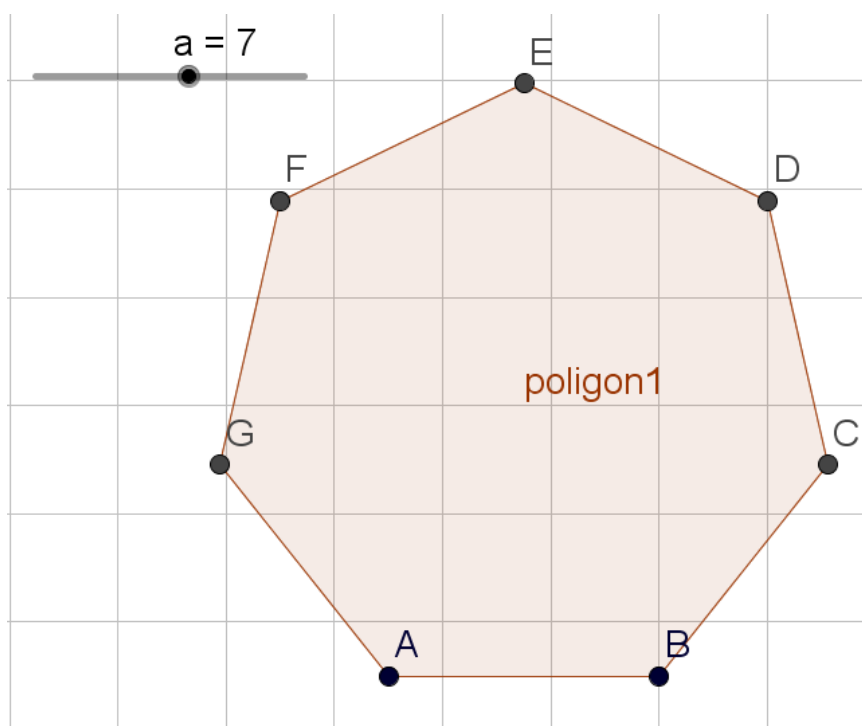
6.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Síkdomok kerülete, területe Szabályos sokszögek	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Kerület • Terület • Szabályos sokszög • Köré írt kör 	
Feladat	<p>1. Vegyél fel tetszőleges sokszöget! Határozd meg oldalainak hosszát, kerületét, területét! Az értékeket írd ki a rajzlapra!</p> <div data-bbox="507 763 1278 1249"> <p> Kerület = 28.47 Terület = 36 a = 10.82 b = 7.21 c = 10.44 </p> </div> <p>2. Határozd meg az 5 egység oldalú szabályos sokszög (5-10 oldalú sokszög) kerületét, területét! Az értékeket írd ki a rajzlapra két tizedesjegy pontossággal!</p> <div data-bbox="459 1377 1295 1921"> <p> Kerület₅ = 25 Terület₅ = 43.01 </p> </div>	



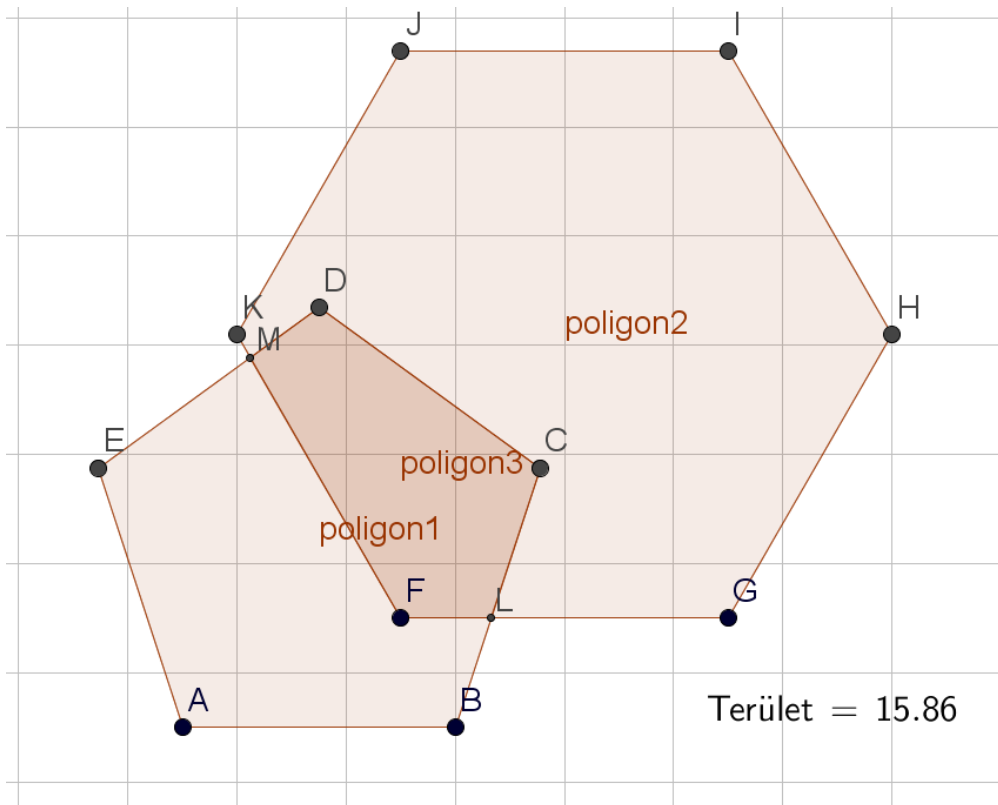
3. Határozd meg a szabályos 5 oldalú sokszög területe hány százaléka a közé írt kör területének! Az értékeket írd ki a rajzlapra! Változtasd a sokszög oldalának hosszát! Hogyan változik a területek aránya?



4. Rajzolj szabályos sokszöget csúszkával! A csúszka értéke 5-től 10-ig egész értékeket vegyen fel!



5. Határozd meg két egymást metsző szabályos sokszög metszetének területét!

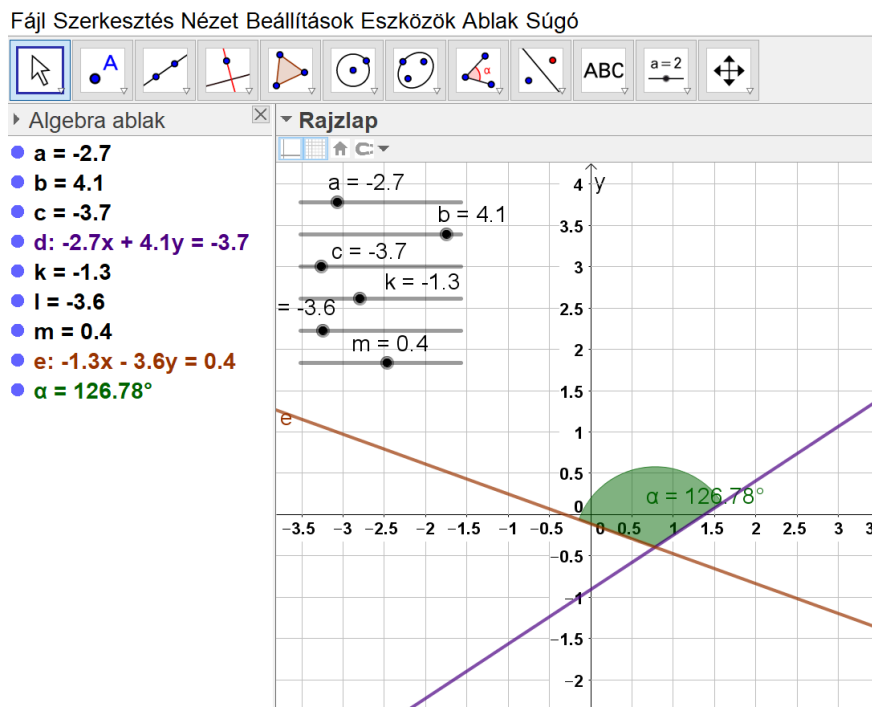


<p>9.</p>	<p>Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam</p>	
<p>Téma:</p>	<p>Egyenesek egyenlete, hajlásszöge Körcikkek, körszelet terület</p>	
<p>Elmélet</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Egyenes egyenlete • Egyenesek hajlásszöge • Körcikkek területe • Körszelet területe • Nevezetes azonosság • Forgatás 	
<p>Feladat</p>	<p>1. a) Ábrázolj egyeneseket két pontjukból!</p> <div data-bbox="523 689 1276 1288"> <p>Fájl Szerkesztés Nézet Beállítások Eszközök Ablak Súgó</p> <p>Algebra ablak</p> <ul style="list-style-type: none"> • A = (-2, 6) • B = (2, 10) • a: $-x + y = 8$ • C = (3, 7) • D = (6, 5) • b: $2x + 3y = 27$ • E = (-2, 1) • F = (4, 10) • c: $-3x + 2y = 8$ • d: $x + y = 4$ </div> <p>b) Vizsgáld meg az algebra ablakban az egyenesek egyenleteit!</p> <p>c) Ábrázolj egyeneseket az egyenleteikből!</p> <div data-bbox="571 1415 1220 1964"> <p>Fájl Szerkesztés Nézet Beállítások Eszközök Ablak Súgó</p> <p>Algebra ablak</p> <ul style="list-style-type: none"> • a: $3x - y = -3$ • b: $-4x + 3y = 11$ • c: $2x - 0.67y = 7$ • d: $x = -0.6$ • e: $y = -1.5$ </div>	



2.

- Ábrázolj két egyenest, határozd meg a hajlásszögüket!
- Ábrázolj két egyenest csúszkákkal! Jelenítsd meg az egyenesek hajlásszögét!



3.

Rögzített középponttal rajzolj kört, a sugara legyen $0 \leq r \leq 5$ egységnyi beosztással! Ábrázolj egy egyenest csúszkákkal!

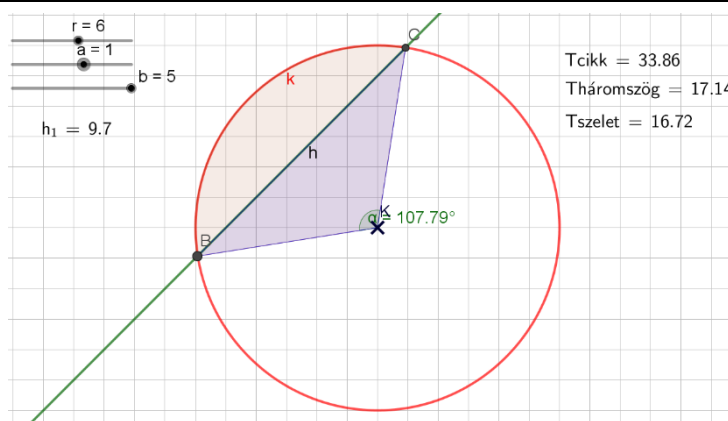
$$-10 \leq a \leq 10$$

$$-10 \leq b \leq 10$$

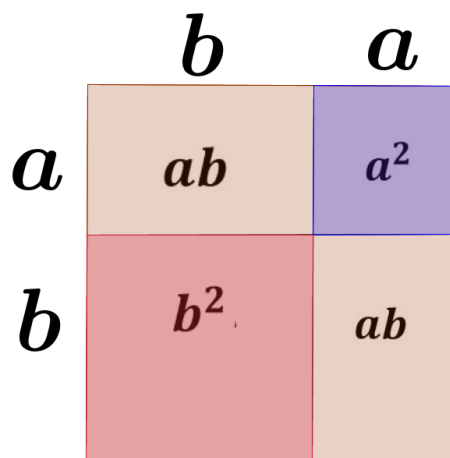
- Határozd meg az egyenesből a kör által kimetszett húr hosszát!
- Határozd meg a húr által meghatározott középponti háromszög területét!
- Határozd meg a húr által meghatározott körcikk területét!
- Határozd meg az egyenes által a körből lemetszett kisebbik körszelet területét!

A meghatározott értékeket tedd ki a rajzlapra!



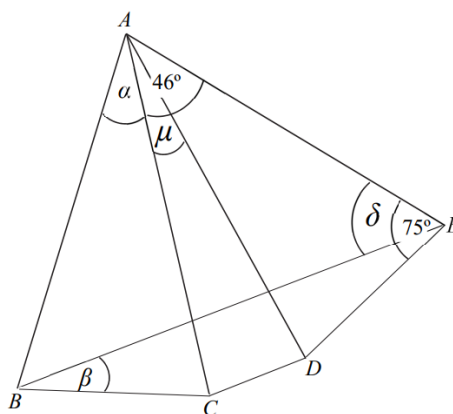


4. Igazold geometriai úton az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ azonosságot!



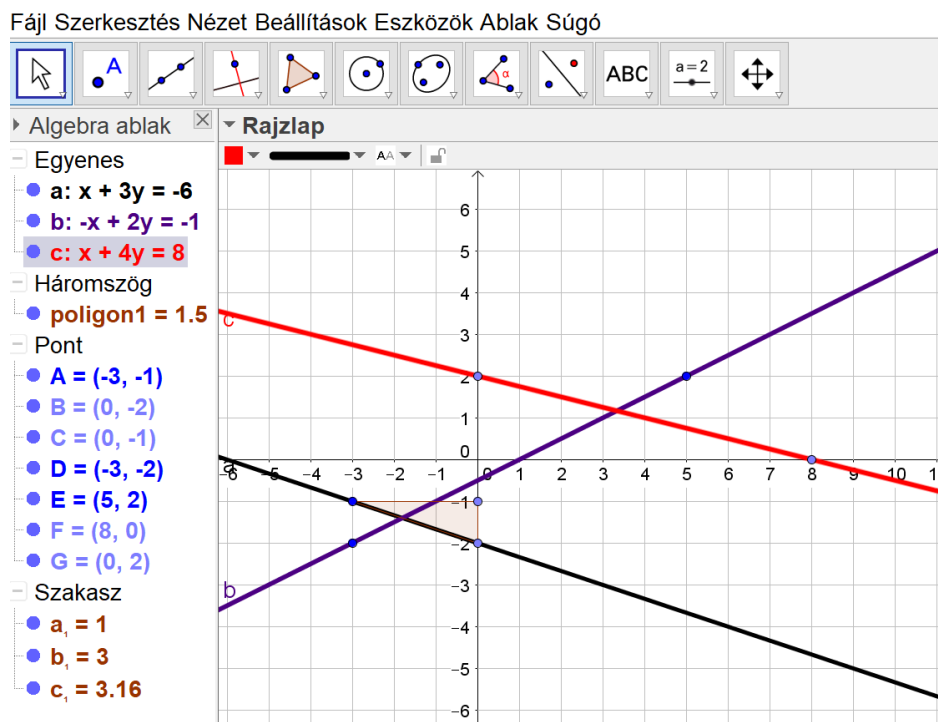
5. Szerkeszd meg az 8. osztályos felvételi dolgozat 5. feladatát! Határozd meg a bejelölt szögeket!

Az alábbi ábrán vázolt ABC egyenlő szárú háromszöget ($AB = AC$) az A csúcsa körül 46° -kal elforgattuk, így keletkezett az ADE háromszög.
Az ADE háromszögben az E csúcsnál lévő szög 75° -os.
(Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)



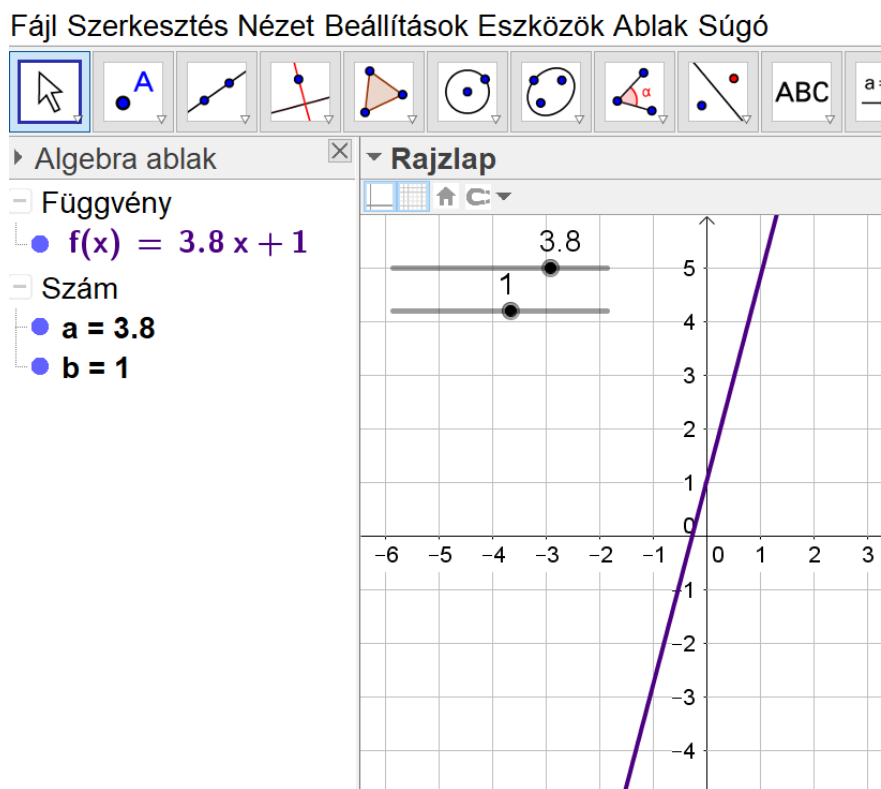
10.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam																																														
Téma:	Lineáris függvények																																														
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> Egyenes Egyenes meredeksége Konstans függvény 																																														
Feladat	<p style="text-align: center;">1. Ábrázold a következő egyeneseket!</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f(x)</td> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-4</td> <td style="text-align: center;">-6</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">g(x)</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td></td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">h(x)</td> <td style="text-align: center;">-6</td> <td style="text-align: center;">-5</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">e(x)</td> <td style="text-align: center;">11</td> <td></td> <td style="text-align: center;">7</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">a) Add meg a hozzárendelési szabályukat!</p> <div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="flex: 1;"> <p>$f(x) = -2x$</p> <p>$g(x) = x$</p> <p>$h(x) = x - 3$</p> <p>$e(x) = -2x + 5$</p> </div> <div style="flex: 2;"> </div> </div> <p style="text-align: center;">b) Hány pont szükséges egy egyenes megadásához?</p> <p>2. Ábrázold a következő egyeneseket! Add meg a hozzárendelési szabályukat!</p> <p>a) Áthalad a P(3;-1) ponton és meredeksége -1/3.</p> <p>b) Áthalad az A(-3;-2), B(5;2) pontokon.</p> <p>c) Tengelymetszetei: x=8, y=2. Mekkora értéket vesznek fel az x = -12 helyen? Milyen változó(x) esetén lesznek a függvényértékek egyenlők -3-al?</p>	x	-3	-2	-1	0	1	2	3		f(x)	6	4	2	0	-2	-4	-6		g(x)	-3		-1	0		2			h(x)	-6	-5			-2				e(x)	11		7						
x	-3	-2	-1	0	1	2	3																																								
f(x)	6	4	2	0	-2	-4	-6																																								
g(x)	-3		-1	0		2																																									
h(x)	-6	-5			-2																																										
e(x)	11		7																																												





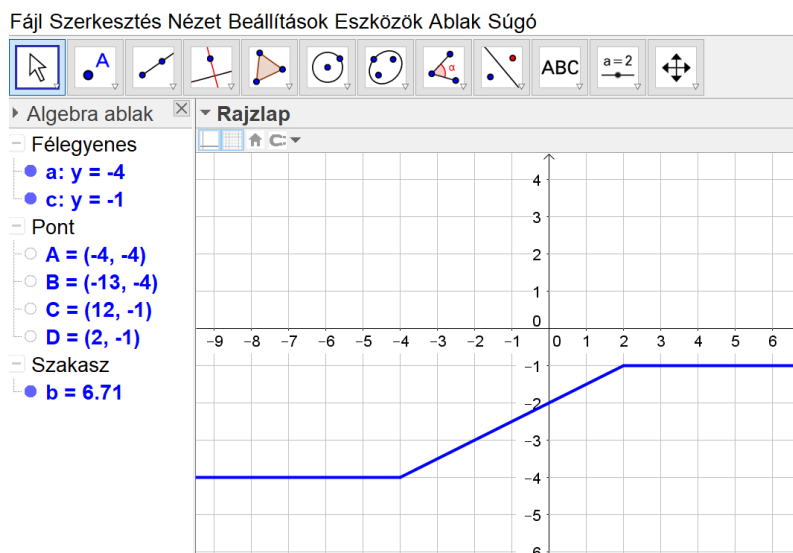
3. Ábrázold a lineáris függvényt csúszkákkal! $f(x) = ax + b$

$$-8 \leq a \leq 8, -10 \leq b \leq 10$$

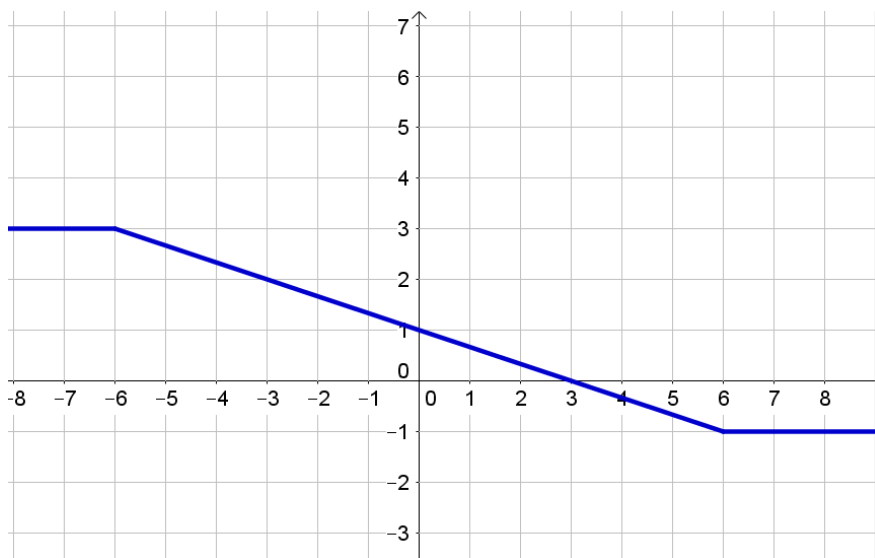


4. Ábrázold a következő függvényt!

$$f(x) = \begin{cases} -4, & \text{ha } x \leq -4 \\ \frac{1}{2}x - 2, & \text{ha } -4 < x < 2 \\ -1, & \text{ha } 2 \leq x \end{cases}$$



5. Készítsd el a következő függvény hozzárendelési szabályát!

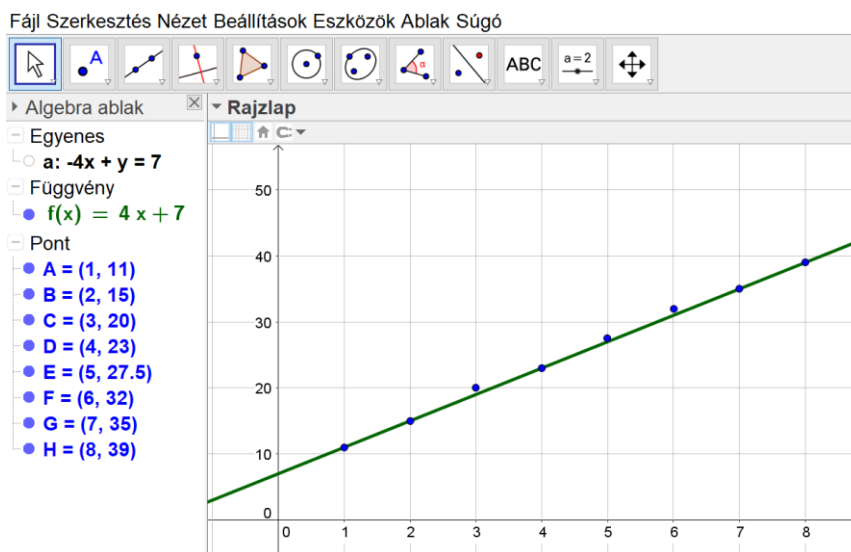


$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \leq -6 \\ -\frac{1}{3}x + 1, & \text{ha } -6 < x < 6 \\ -1, & \text{ha } 6 \leq x \end{cases}$$



6. Egy cég működésének első 8 hónapjában a következő bevételi adatokat produkálta: 11, 15, 20, 23, 27,5, 32, 35, 39.

- Milyen függvény fektethető jó közelítéssel az adatokra?
- Mennyi lesz a várható bevétel ugyanilyen növekedési ütem mellett a 20. hónapban?
- Mikor éri el a várható bevétel ugyanilyen növekedési ütem mellett az 55-öt?
- A 15-20. hónapig átlagos stagnálás, majd a következő 5 hónapban átlagosan havi 3 egység növekedés jött létre. Mennyi lesz a bevétel a vizsgált időszak végén?
Mi lesz a harmadik szakasz hozzárendelési szabálya?

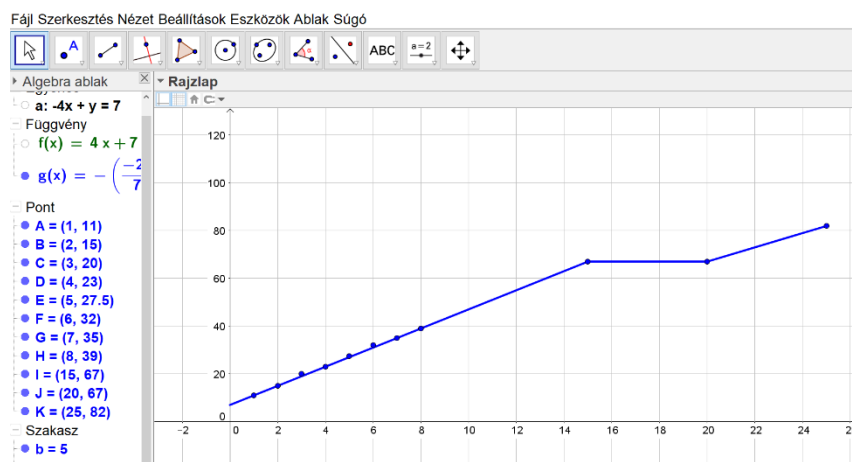


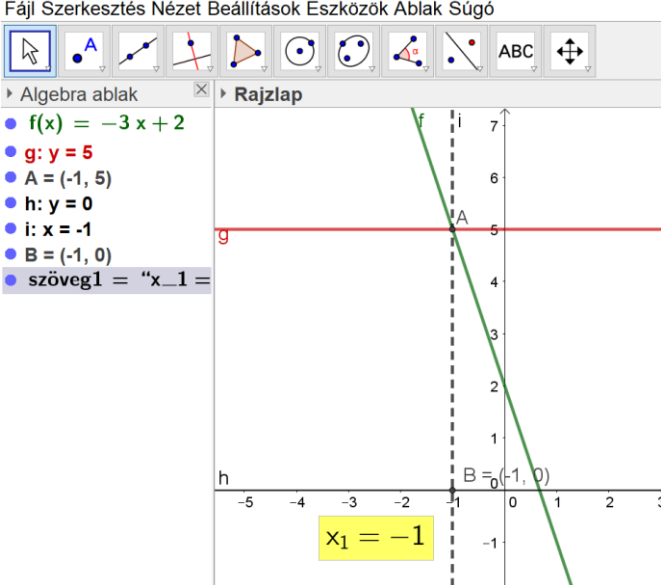
a, $f(x) = 4x + 7$

b, $f(20) = 4 \cdot 20 + 7 = 87$

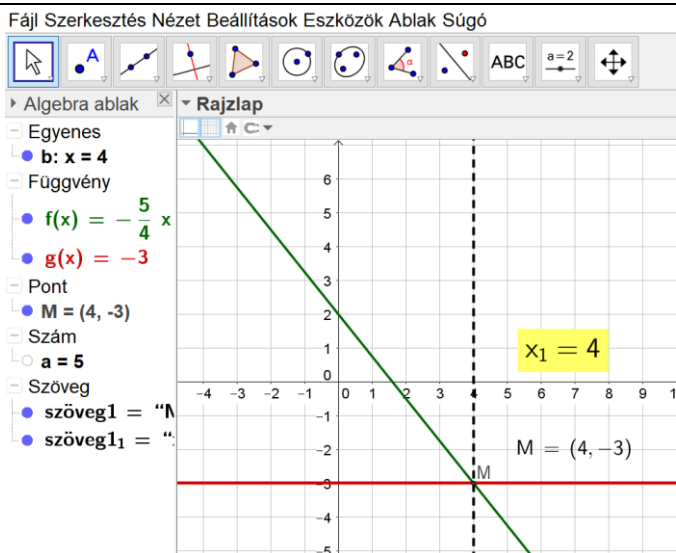
c, $55 = 4x + 7 \quad x = 12$

d,



11.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Egyenlet, egyenlőtlenség megoldása grafikusan	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Egyenlet megoldása grafikusan • Metszéspont 	
Feladat	<p>7. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket!</p> <p>a) $-3x + 2 = 5$ $f(x) = -3x + 2$ $g(x) = 5$ $f(x) = g(x)$ Metszéspont$(-1; 5)$</p> <p style="text-align: right;">Megoldás: $x = -1$</p>  <p>b) $-\frac{5}{4}x + 2 = -3$ $f(x) = -\frac{5}{4}x + 2$ $g(x) = -3$ $f(x) = g(x)$ Metszéspont$(4; -3)$</p> <p style="text-align: right;">Megoldás: $x = 4$</p>	



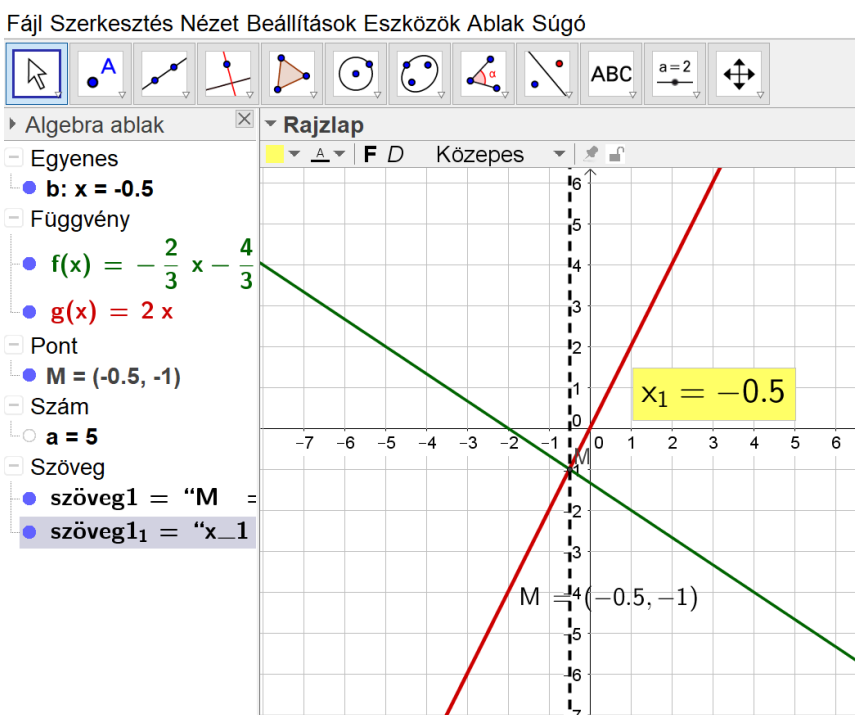


c) $-\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 2x$

$f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \quad g(x) = 2x \quad f(x) = g(x)$

Metszéspont(-0,5; -1)

Megoldás: $x = -0,5$



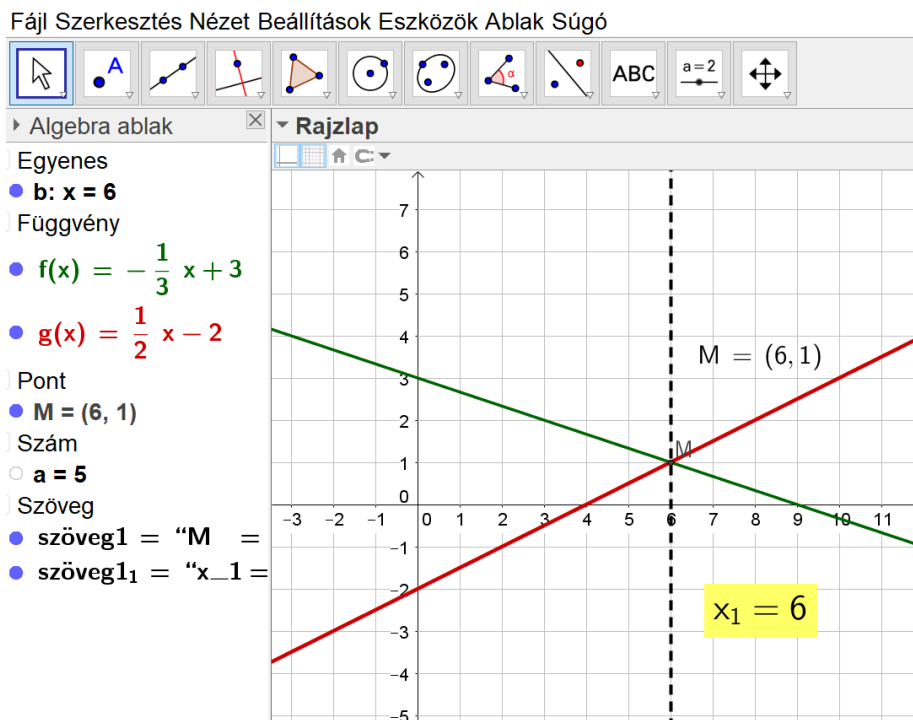
d) $-\frac{1}{3}x + 3 = \frac{1}{2}x - 2$

$f(x) = -\frac{1}{3}x + 3 \quad g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$f(x) = g(x)$ Metszéspont(6; 1)

Megoldás: $x = 6$

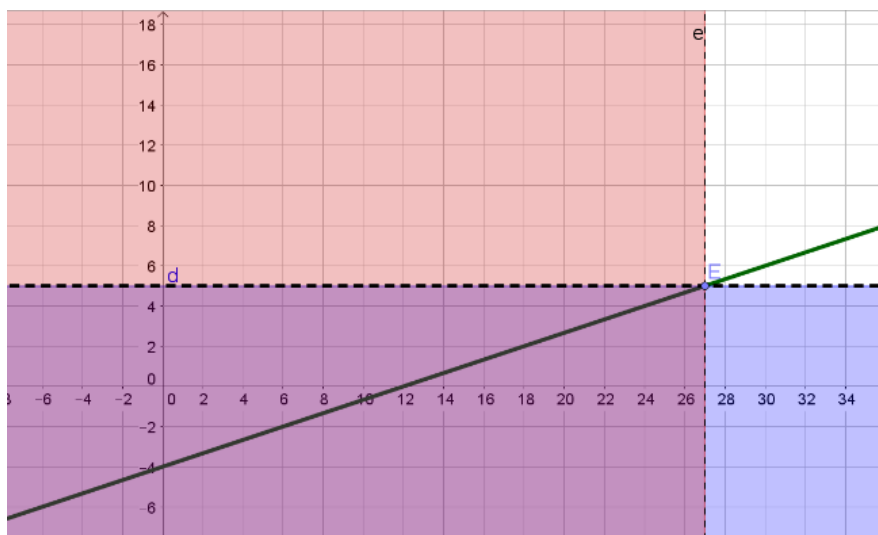




8. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{1}{3}x - 4 \leq 5$

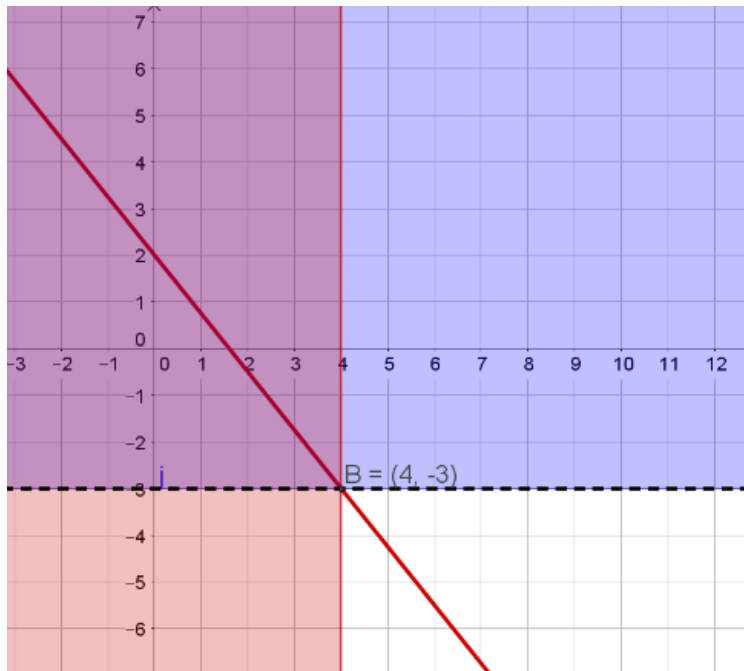
Megoldás: $x \leq 27$



b)

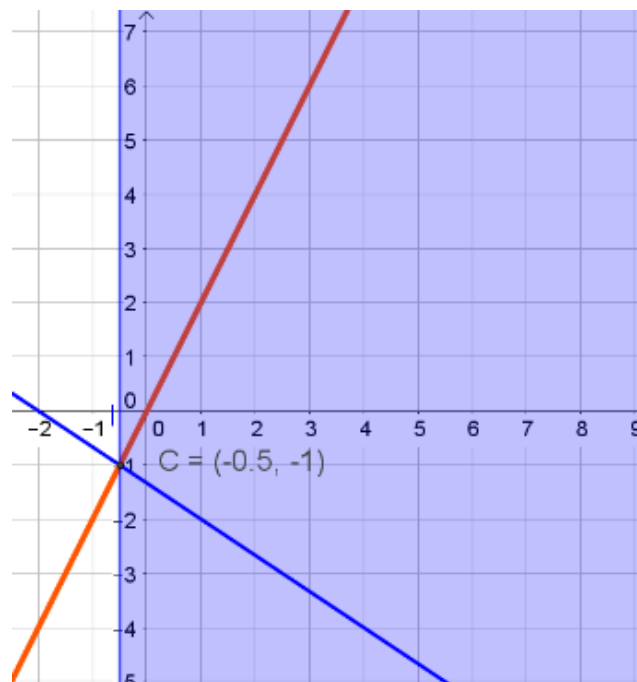
$$-\frac{5}{4}x + 2 \geq -3$$

Megoldás: $x \leq 4$



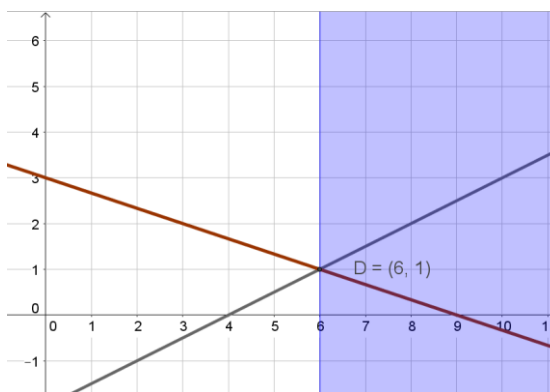
c) $-\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \leq 2x$

Megoldás: $x \geq -0,5$



d) $-\frac{1}{3}x + 3 \geq \frac{1}{2}x - 2$

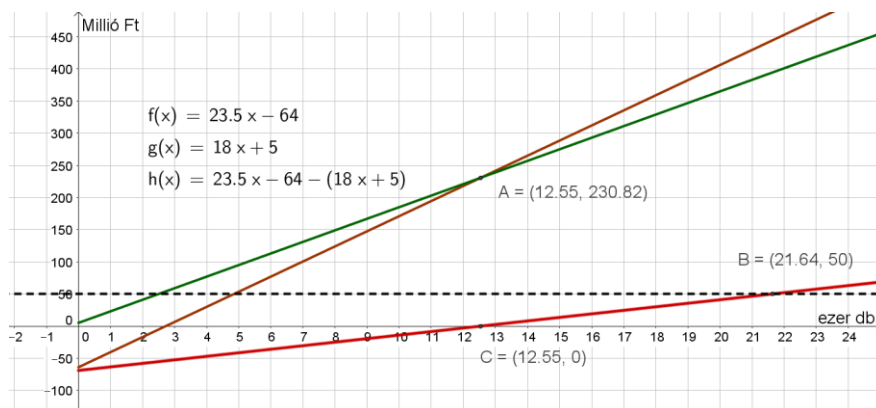
Megoldás: $x \geq 6$



3.

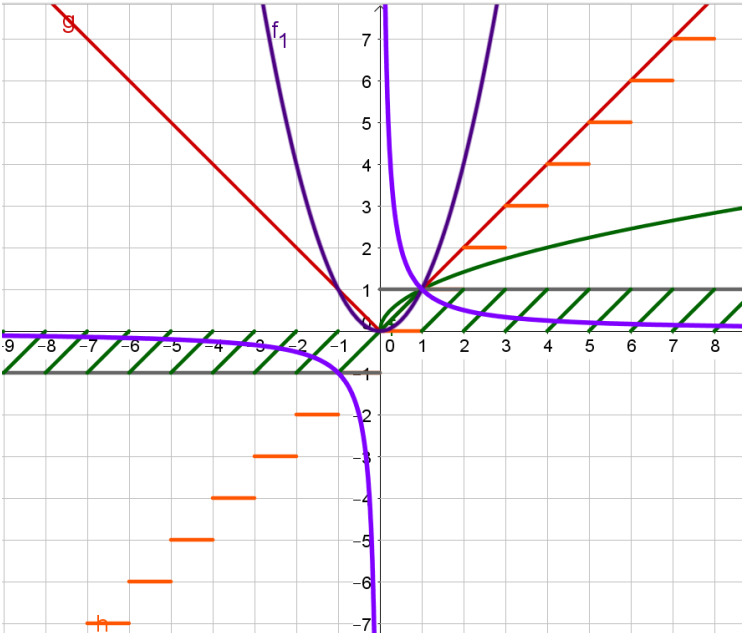
Egy cég termékgyártásból származó bevételét az $f(x)=23,5x+64$ függvény határozza meg. A termékgyártásból adódó költségfüggvényt a $g(x)= 18x+5$ függvény határozza meg, x a termékek darabszámát 1000 ben adja meg. A függvényérték a bevételt millió Ft-ban adja meg.

- a) Milyen darabszám esetén érdemes elkezdni a gyártást?
- b) Milyen darabszám esetén éri el a haszon az 50 millió forintot?



- a) A gyártást 12 550 db esetén érdemes elkezdni.
- b) A nyereség 21 640 db esetén éri el az 50 Millió Ft-ot.



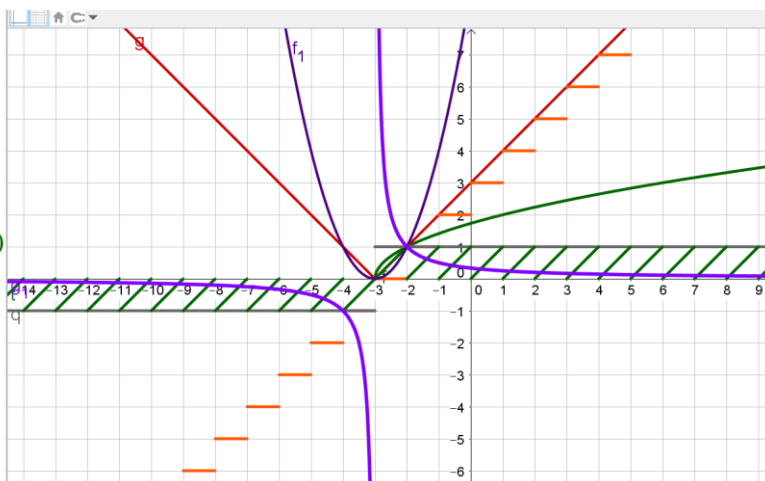
12.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Függvény típusok, függvénytranszformációk	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Abszolútérték • Másodfokú • Négyzetgyök • Lineáris tört • Egészrész • Törtrész • Sign 	
Feladat	<p>1. Ábrázold a következő függvények alapfüggvényeit közös koordináta-rendszerbe!</p> <p>a) Abszolútérték b) Másodfokú c) Négyzetgyök d) Lineáris tört e) Egészrész f) Törtrész g) Sign</p>  <p>2. Végezd el az előző függvények függvénytranszformációit egymás után!</p> <ul style="list-style-type: none"> - x tengely mentén -3-al eltolás - y tengely mentén +4-vel eltolás - tükrözés az eltott x tengelyre 	



- y tengely mentés 2-szeres nyújtás

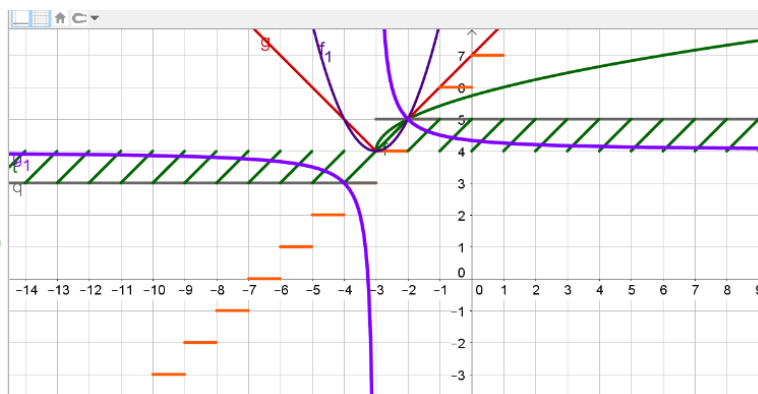
Függvény

- $f(x) = \sqrt{x+3}$
- $f_1(x) = (x+3)^2$
- $g(x) = |x+3|$
- $g_1(x) = \frac{1}{x+3}$
- $h(x) = \lfloor x+3 \rfloor$
- $q(x) = \text{sgn}(x+3)$
- $t(x) = \text{TörtRész}(x+3)$



Függvény

- $f(x) = \sqrt{x+3} + 4$
- $f_1(x) = (x+3)^2 + 4$
- $g(x) = |x+3| + 4$
- $g_1(x) = \frac{1}{x+3} + 4$
- $h(x) = \lfloor x+3 \rfloor + 4$
- $q(x) = \text{sgn}(x+3) + 4$
- $t(x) = \text{TörtRész}(x+3)$

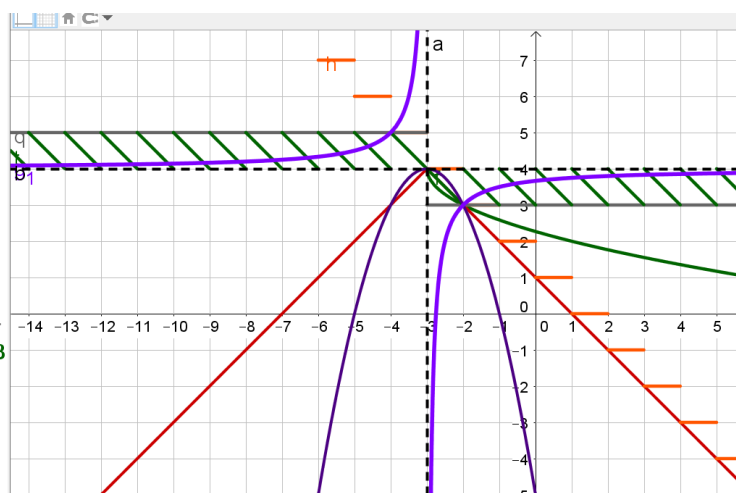


Egyenes

- $a: x = -3$
- $b: y = 4$

Függvény

- $f(x) = -\sqrt{x+3} + 4$
- $f_1(x) = -(x+3)^2 + 4$
- $g(x) = -|x+3| + 4$
- $g_1(x) = -\frac{1}{x+3} + 4$
- $h(x) = -\lfloor x+3 \rfloor + 4$
- $q(x) = -\text{sgn}(x+3) + 4$
- $t(x) = -\text{TörtRész}(x+3)$

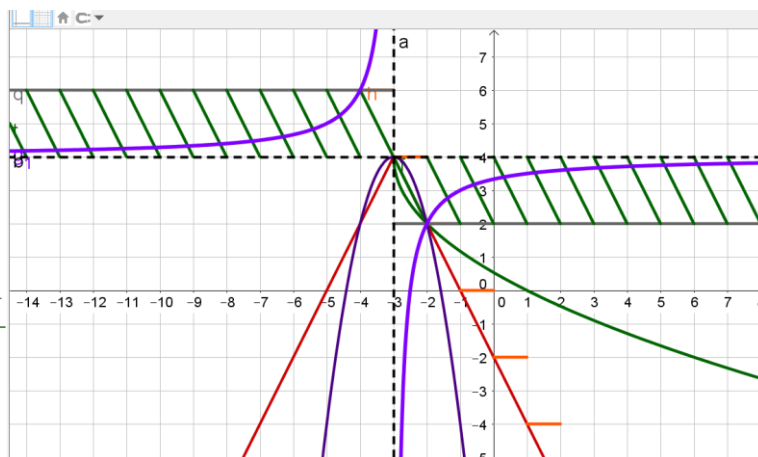


Egyenes

- $a: x = -3$
- $b: y = 4$

Függvény

- $f(x) = -2\sqrt{x+3} + 4$
- $f_1(x) = -2(x+3)^2 + 4$
- $g(x) = -2|x+3| + 4$
- $g_1(x) = -\frac{2}{x+3} + 4$
- $h(x) = -2\lfloor x+3 \rfloor + 4$
- $q(x) = -2\text{sgn}(x+3) + 4$
- $t(x) = -2\text{TörtRész}(x+3)$

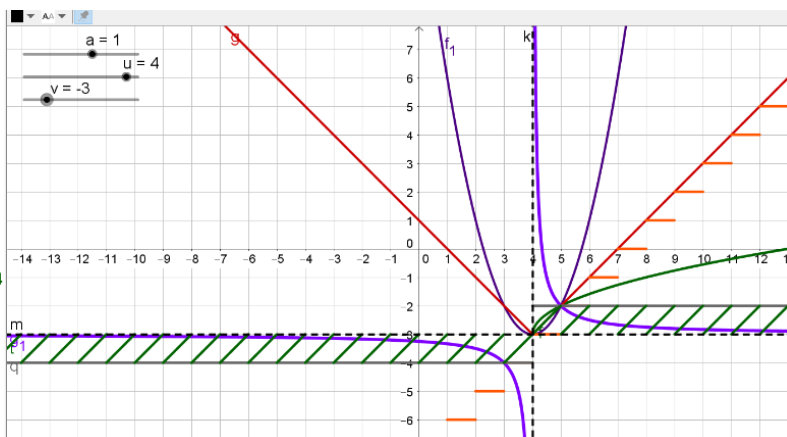


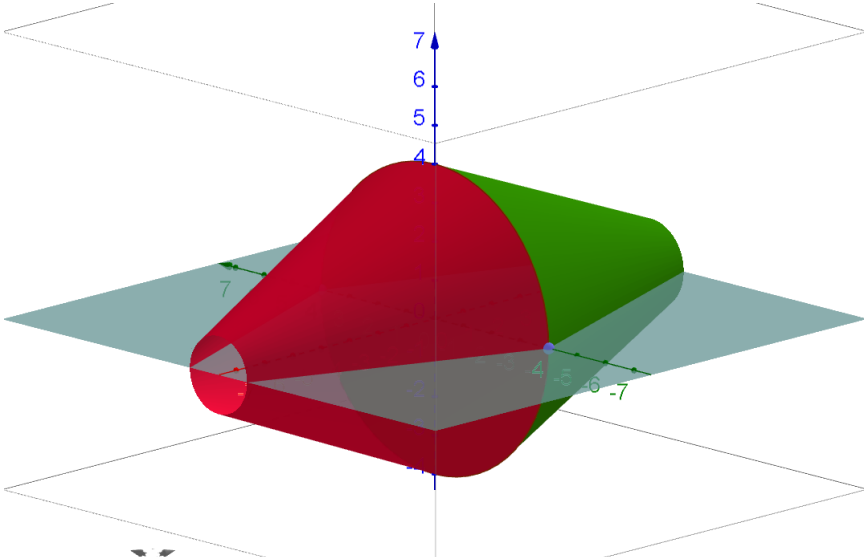
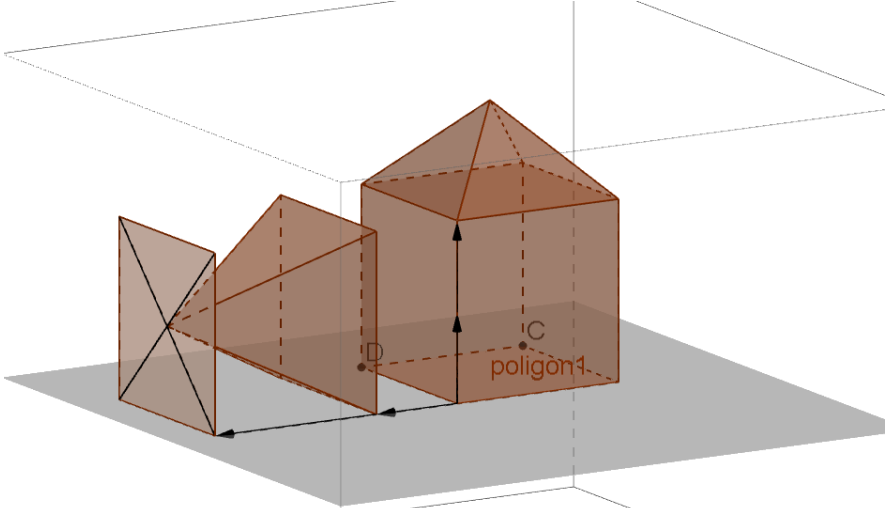
U
S:

3.

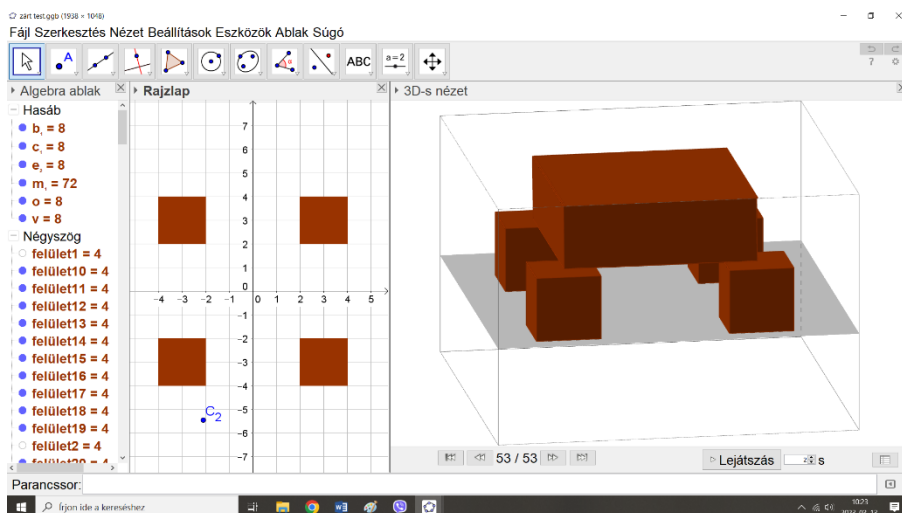
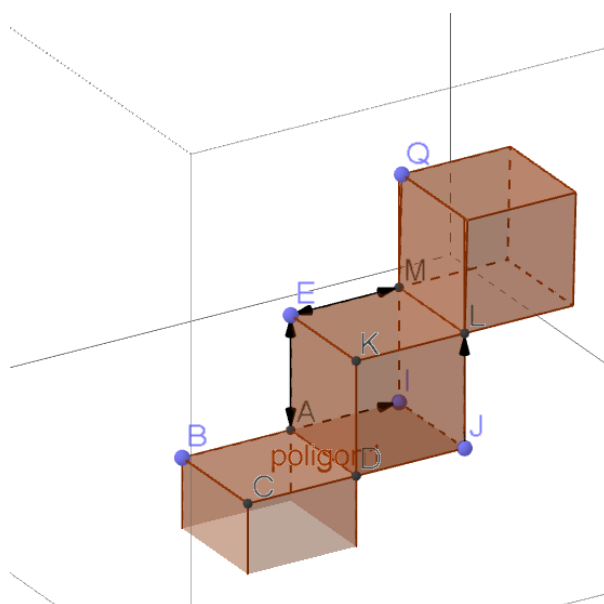
Készítsd el a fenti függvények transzformációs alakját, csuszkákkal!

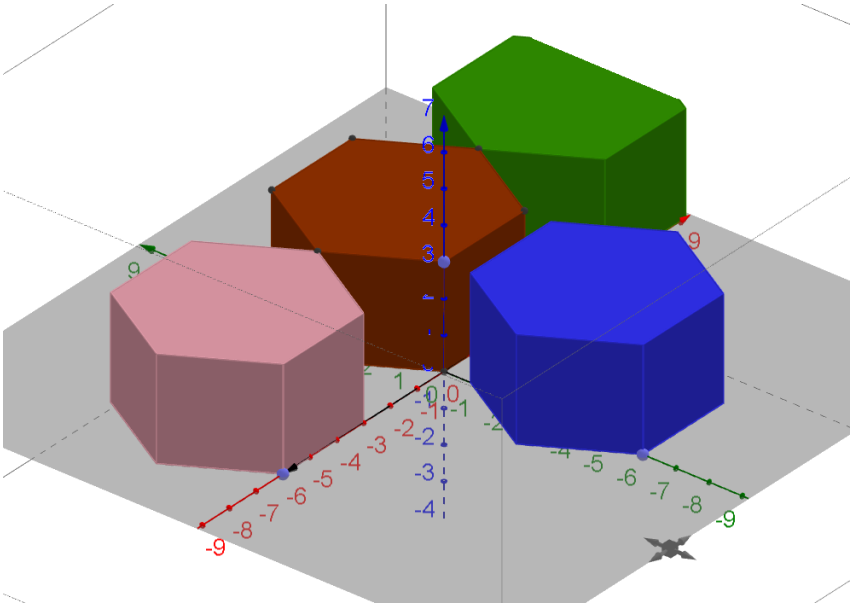
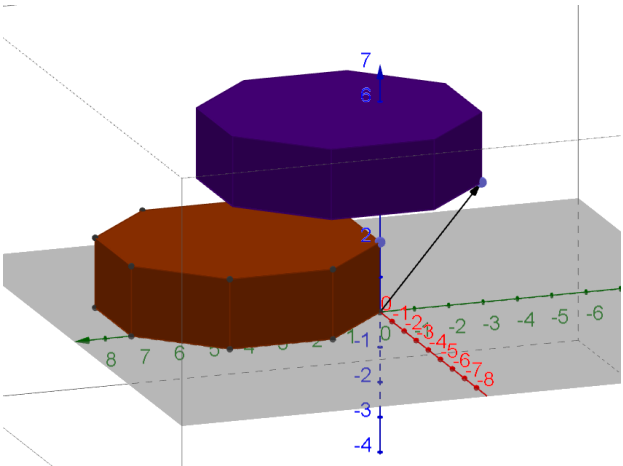
- Egyenes
- k: $x = 4$
 - m: $y = -3$
- Függvény
- $f(x) = 1 \sqrt{x-4} - 3$
 - $f_1(x) = 1 (x-4)^2 - 3$
 - $g(x) = 1 |x-4| - 3$
 - $g_1(x) = \frac{1}{x-4} - 3$
 - $h(x) = 1 \lfloor x-4 \rfloor - 3$
 - $q(x) = 1 \operatorname{sgn}(x-4) - 3$
 - $t(x) = 1 \operatorname{TörtRész}(x-4)$
- Szám
- a = 1
 - u = 4
 - v = -3



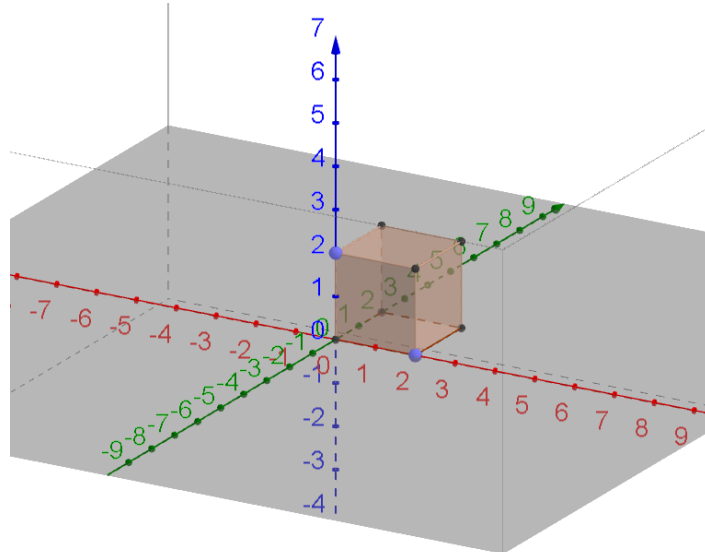
13.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Testek ábrázolása 1.	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Kocka • Hasáb • Henger • Síkmetszetek 	
Feladat	<p>1. Ábrázolj több szabályos testből álló zárt testeket! Pl:</p>  <p>2. Vektorral való eltolással alkoss testeket!</p> 	



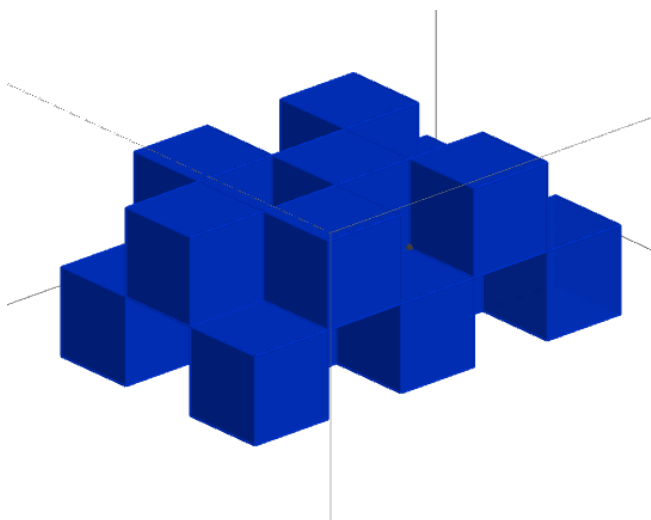
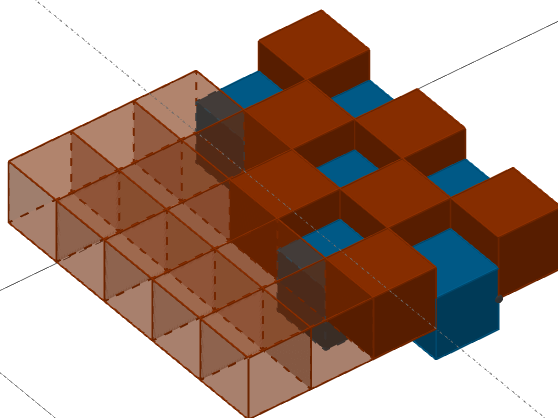


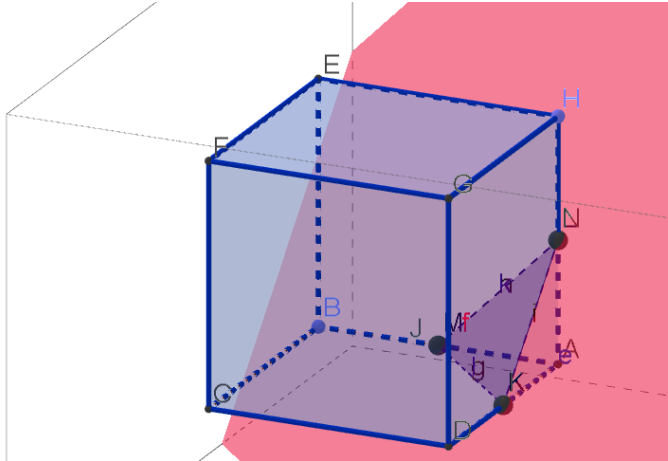
14.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Testek ábrázolása 2. Vektorral való eltolás	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Kocka • Hasáb • Henger • Vektorral való eltolás 	
Feladat	<p>1. Ábrázolj szabályos testeket! Készítsd el a test tetszőleges vektorral való eltolását! Pl:</p>  <p>2. Készíts olyan testet, amelynek egyik oldala a másik „negatívja”. Egymásba rakható testek.</p> 	





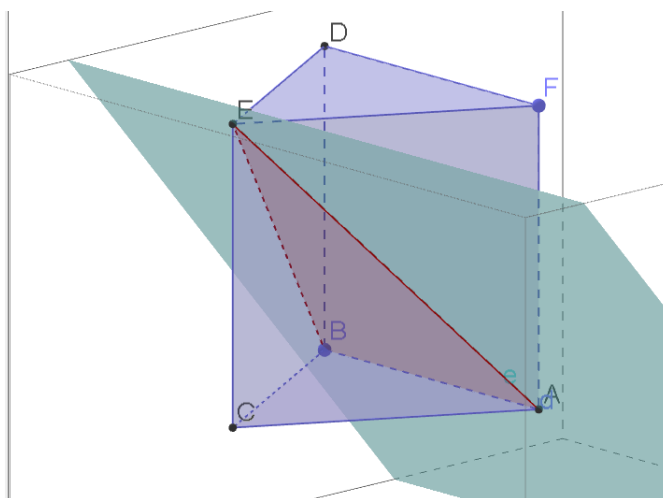
3. Készíts azonos testekből egybefüggő alakzatot vektorral való eltolással! Az alakzatok feliratozása ne jelenjen meg! Állítsd be előre a beállításoknál!



15.	Varázslatos Geogebra - "kőből piramis" matematika 9. évfolyam	
Téma:	Testek ábrázolása 3. Síkmetszetek	
Elmélet	<ul style="list-style-type: none"> • Kocka • Hasáb • Henger • Síkmetszetek 	
Feladat	<p>1.</p> <p>d) Ábrázolj olyan kockát, melynek minden éle 5 egység!</p> <p>e) Határozd meg a felszínét, térfogatát!</p> <p>f) Fektess síkot három, egy csúcsból induló él felezőpontján keresztül!</p> <p>g) Határozd meg a síkmetszet területét!</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="flex: 1;"> <p>Terület$KLM = 5.41$</p> <p>Felszín:$6a^2=600$ ter. e.</p> <p>Térfogat:$a^3=5^3=125$ térf.e.</p> </div> <div style="flex: 2;">  </div> </div> <p>2.</p> <p>a) Ábrázolj egyenlő oldalú háromszög alapú hasábot, minden éle legyen 5 egység!</p> <p>b) Határozd meg a felszínét, térfogatát!</p> <p>c) Fektess síkot három átellenes csúcsán keresztül!</p>	

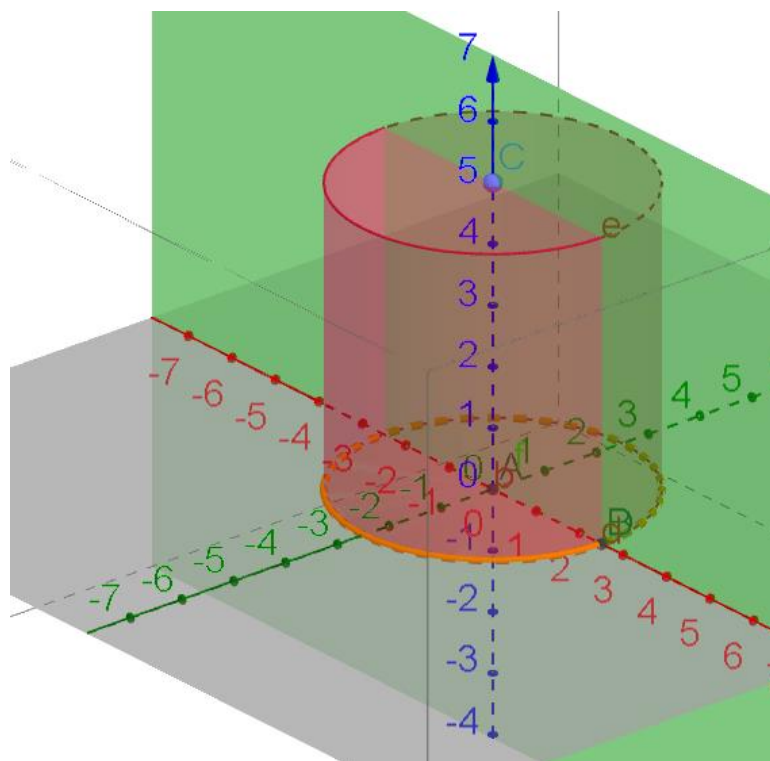
d) Határozd meg a síkmetszet területét!

Terület_{ABE} = 16.54
 $T_a = 10.83$
 Felszín: $2T_a + 3T_o =$
 $10.83 \cdot 2 + 3 \cdot 25 = 96.66$ ter.e.
 Térfogat: $T_a \cdot M = 10.83 \cdot 5$
 $= 54.15$ térf.e.



3.

- Ábrázolj egyenes körhengert, melynek alaplapp átmérője és magassága is 5 egység!
- Határozd meg a felszínét, térfogatát!
- Fektesz síkot az alaplappra merőlegesen úgy hogy tartalmazza a henger fogástengelyét!
- Határozd meg a síkmetszet területét!



A Tanári kézikönyvben szereplő rajzokhoz tartozó geogebra file-ok elérhetők a

Szolnoki SZC Pálfy – Vízügyi Technikum honlapján, valamint a <https://www.geogebra.org/u/kjxtengerszemx> honlapon.

Az elkészített grafikai munkák szabadon használhatók és letölthetők.

- | | |
|---|--|
|  biliárdgolyó001 |  egyenesábrcsuszakkal001 |
|  egyenesábregyenletéből001 |  egyenesekábrázolása001 |
|  egyenesekábrázolásacsuszakával001 |  egyenesekhajlászöge001 |
|  egyenesekkétpontból001 |  egyenesstatisztikaiadatokra001 |
|  egyenesstatisztikaiadatokra002 |  egyenesstatisztikaiadatokra003 |
|  egyenestöröttvonal001 |  egyenletmegoldása001 |
|  egyenletmegoldása002 |  egyenletmegoldása003 |
|  egyenletmegoldása004 |  függvénytípusoktranszfomációk001 |
|  függvénytípusoktranszfomációk002 |  függvénytípusoktranszfomációk003 |
|  függvénytípusoktranszfomációk004 |  függvénytípusoktranszfomációk005 |
|  függvénytípusoktranszfomációk006 |  hasábmetszésesíkkal001 |
|  hengermetszésesíkkal001 |  kockaháromgúlból001 |
|  köradottpontjábaérintő001 |  körkörhurjakorcikk001 |
|  körrészei001 |  külsőpontbólérintő001 |
|  lineárisfüggvénypontokból001 |  magasságvonal001 |
|  nevezetesazonigazolása001 |  oldalfelezőmerőleges001 |
|  sokszögekmetseténekterülete001 |  súlyvonalak001 |
|  szabályossokszögcuszkával001 |  szabályossokszögek001 |
|  szögfelezők001 |  tengelyestükrözés001 |
|  testekábrázolása001 |  testekábrázolása002 |
|  testekábrázolása003 |  testekeltolása001 |
|  testekeltolása002 |  testekeltolása003 |
|  testekeltolása004 |  testekhálója001 |
|  testekhálója002 |  testekhálója003 |
|  trapézkerületterület001 |  trapéztükrözéseszárfelelőpontra001 |
|  tükörképszerkesztés001 |  vektorokkomponensekbontása001 |
|  vektorralvalóeltolás001 |  vektorműveletek001 |
|  vektorműveletek002 |  vektorműveletek003 |

